

Тема «А годы летят ...»

100. В семье два мальчика, один из которых старше другого на год. Каждому из них в 2019 году исполняется столько лет, какова сумма цифр года рождения брата. Сколько же им исполняется?

О т в е т: 10 и 11.

200. - Денис, сколько лет твоей прабабушке?

- Она в 11 раз старше меня. А цифры года её рождения можно так переставить, что получится нынешний год.

Сколько лет было Денису во время этого разговора?

О т в е т: 9.

Р е ш е н и е. Год рождения прабабушки и год разговора имеют равные суммы цифр, а значит, их разность делится на 9. Поэтому прабабушкин возраст, кратный 11, кратен также и 9. Следовательно, он кратен 99. Если прабабушке $99k$ лет, где k - натуральное число, то Денису - $9k$. Остаётся заметить, что по смыслу задачи подходит только $k=1$.

300. Все члены семьи Ивановых, сумма возрастов (в годах) которых десять лет назад равнялась 55, живы-здоровы. Сколько лет самому младшему из Ивановых, если пять лет назад всем Ивановым в сумме было 66, а сейчас - 86? (Укажите все возможности.)

О т в е т: 5, 2, 1, 0.

У к а з а н и е. Замечаем, что десять лет назад семья состояла всего из двух человек. Далее устанавливаем, что пять лет спустя в ней были и новые члены, сумма возрастов которых равнялась 1 году. Если ребёнок был один, то сейчас сумма возрастов тогдашних троих Ивановых - 81 год, т.е. с тех появились дети, сумма возрастов которых равна 5 годам; ясно, что возраст самого младшего в таком случае 2, 1 или 0 лет. Если же был ещё и ребёнок нулевого возраста, то сейчас сумма возрастов тогдашних четверых Ивановых в точности 86. Значит, самому младшему либо 5 (если детей больше не появилось), либо 0.

400. Встречаются две выпускницы математического факультета.

- Ох, давно не виделись! Слышала, что у тебя трое детей.

- Да, а младшая такой ангелочек! Кстати, произведение возрастов всех троих равно числу лет, которые мы не виделись.

- Все возраста мне определить невозможно.

- Ну, могу подсказать, старшему уже ...

- Всё, не надо! Я определила!

Определите и вы.

О т в е т: 1, 2, 8.

Р е ш е н и е. Пусть (p, q, r) - искомая тройка чисел, расположенных в неубывающем порядке. Тогда $p=1$ ("ангелочку" - 1 год!), иначе не выполнялось бы условие единственности (подходила бы и тройка $(1, q, pr)$). Кроме того, число q - простое. В самом деле: если бы q делилось на натуральное q' , отличное от 1 и от q , то подходила бы тройка $(1, q/q', q't)$.

Далее, произведение qr должно быть точным квадратом, поскольку наряду с тройкой $(1, q, r)$ должна существовать тройка $(1, s, s)$, где s - натуральное, $s^2 = qr$. (Это - тройка, которая была исключена только после получения информации о том, что есть старший (среди троих) ребёнок.) Число s кратно q (в силу простоты последнего), $s = qt$, где t - натуральное. При этом, если t отлично от q , то получается противоречие с условием единственности, поскольку тройка $(1, q^2, t^2)$ также оказывается подходящей.

Итак, $t = q$. Отсюда $s = q^2$ и $r = s^2/q = q^3$, то есть искомая тройка имеет вид $(1, q, q^3)$. По смыслу задачи подходит только $q=2$.

Тема «Игрушки»

100. У Мити есть красные, синие и белые кубики одинакового размера. Известно, что для любого цвета из всех кубиков этого цвета можно сложить куб; кроме того, куб можно сложить и из всех имеющихся кубиков. Сколько красных, синих и белых кубиков может быть у Мити? (Укажите хотя бы один такой набор.)

Примеры: (3,4,5), (1,6,8).

(Эти наборы подходят, так как $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ и $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$.)

200. Погремушка "бублик" представляет собой прозрачное кольцо с перекатывающимися внутри него 3 жёлтыми и 6 зелёными шариками. Шарик достаточно большой и перескакивать друг через друга не могут. Какое наибольшее число "бубликов", отличающихся друг от друга расположением жёлтых и зелёных шариков в кольце, можно изготовить?

Ответ: 7.

Решение. Выделим три типа "бубликов", отнеся к k -му типу "бублики", для которых наименьшее число зелёных шариков между двумя жёлтыми равно k . При $k=0$ найдётся 4 разных "бублика" (третий жёлтый шарик примыкает к двум другим или отделён от них одним, двумя или тремя зелёными). При $k=1$ имеем два жёлтых шарика, разделённых зелёным. Третий жёлтый шарик может отделяться от ближайшего жёлтого одним или двумя зелёными. Поэтому при $k=1$ найдётся ровно 2 разных "бублика". При $k=2$ "бублик" один. Всего, таким образом, возможны $4+2+1=7$ разных погремушек.

300. Аниного папу детсад попросил сделать 20 трилистников. Трилистник - это три тонкие алюминиевые дужки, соединённые между собой так, что каждая делится двумя другими на три равные части (см. рисунок).

У папы на работе есть много алюминиевых колечек нужного радиуса. Сколько их придётся израсходовать? (Алюминий можно резать и паять, но нельзя гнуть.)

Ответ: 15.

Решение. Пусть A и B - концы одной из дужек, а M - ближайшая к A точка спайки этой дужки с другой дужкой. Легко установить, что величина угла $MAВ$ - 30 градусов. Этот угол вписан в окружность и опирается там на дугу, представляющую собой $2/3$ алюминиевой дужки. Поэтому $2/3$ дужки - дуга величиной 60 градусов, т. е. $1/6$ окружности. Вся дужка, следовательно, - $(1/6)/(2/3) = 1/4$ окружности, на каждый трилистник уйдёт $3/4$ колечка, а на 20 трилистников - $(3/4)*20 = 15$ колечек.

400. Максим, разобравшись с головоломкой Shengshou 2x2 Pyramorphix (см. рисунок), задался вопросом: можно ли в этих 16 треугольниках расставить числа 1, 2, ..., 16 так, чтобы суммы чисел на всех гранях были одинаковы и суммы чисел при всех вершинах были одинаковы?

Помогите Максиму, указав пример такой расстановки (соответствующие четыре четвёрки и четыре тройки чисел).

Пример. Наборы чисел на гранях - (1, 8, 12, 13), (2, 7, 11, 14), (3, 6, 10, 15) и (4, 5, 9, 16), при вершинах - (1, 9, 11), (2, 4, 15), (3, 5, 13) и (6, 7, 8).

Тема «Семейный бюджет»

100. Если покупать продукты в Магните, то на одну зарплату можно прожить 100 дней, если в Перекрёстке, то – 80 дней. Каждое нечётное число продукты покупались в Магните, а каждое чётное – в Перекрёстке. Сколько зарплат было потрачено на продукты в феврале? Укажите все возможные ответы.

Ответ: $63/200=0,315$ или $13/40=0,325$

200. Папа тратит в месяц 10 тысяч рублей и ещё половину маминой зарплаты. Мама тратит 20 тысяч рублей и половину папиной зарплаты. На ребёнка остаётся 5 тысяч. Сколько получают родители?

Ответ: 70 тысяч

300. Взяв ипотечный кредит под 10% годовых, семья заплатила из ранее накопленных средств первый взнос за квартиру в размере 100 тысяч рублей и выплачивала банку (погашала кредит) по 10 тысяч каждый месяц. С ипотекой удалось рассчитаться ровно за 5 лет. Сколько стоит новая квартира, если перерасчёт кредита осуществляется в конце каждого года на остаток? Ответ дайте с точностью до рубля.

Ответ: 712612

Решение. Счёт с конца.

400. В течение года папа менял несколько мест работы и на каждом его зарплата выражалась целым числом тысяч рублей и была больше предыдущей на целое число процентов, но не превысила 45 тысяч рублей. Какое наибольшее число мест работы мог сменить папа, если на первой работе он получал 5 тысяч?

Ответ: 9 (5,8,10,12,15,24,30,40,44)

Решение. Динамическое программирование