Разбор задач 3 тура 1 турнира 7 математической онлайн-игры

Тема «Пять чисел»

100. Приведите пример пяти подряд идущих натуральных двузначных чисел, сумма которых делится на 100.

Ответ: 18, 19, 20, 21, 22.

200. Приведите пример пяти различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Ответ: 1, 2, 3, 6, 12.

300. Приведите пример пяти натуральных чисел таких, что любые два из них не взаимно просты (имеют общий простой делитель), а любые три в совокупности взаимно просты (не имеют общего простого делителя). В ответе каждое число дайте в виде произведения простых множителей, чтобы можно было осуществить его проверку.

Ответ: 2x3x5x7, 2x11x13x17, 7x11x19x23, 3x17x19x29, 5x13x23x29.

400. Приведите пример пяти различных натуральных чисел, среди которых нет делящихся друг на друга, но произведение любых двух из них делится на каждое из пяти чисел. В ответе каждое число дайте в виде произведения простых множителей, чтобы можно было осуществить его проверку.

Ответ: $2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$, $2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$, $2\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot11$, $2\cdot3\cdot5\cdot7^2\cdot11$, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11^2$.

Тема «Работа не волк»

100. Токарь вытачивает одну деталь за 5 минут. Если он сделает дополнительное приспособление к своему станку, то сможет выточить деталь за 2 минуты. Сколько времени можно потратить на изготовление приспособления, чтобы за шестичасовой рабочий день произвести в два раза больше деталей?

Ответ: 1 час 12 минут.

200. Рабочий день должен длиться восемь с половиной часов (от момента прихода на работу до момента ухода) с часовым перерывом с 12 до 13 часов. Токарь Петров до обеда работает в 2 раза лучше, чем после обеда (вытачивает в два раза больше деталей за единицу времени), а токарь Иванов после обеда работает в три раза лучше, чем до обеда. Когда должен начинаться рабочий день, чтобы оба токаря выточили поровну деталей?

Ответ: 9 часов.

300. На одной стороне улицы стояло 30 фонарей, причём среди любых трёх фонарей, стоящих подряд, хотя бы один был разбит. После того, как электрик Петров починил несколько фонарей, среди любых четырёх фонарей, стоящих подряд, осталось не более одного разбитого. Какое наименьшее количество фонарей мог починить Петров?

Ответ: 5. **Решение.** Разобьём фонари на 5 шестёрок подряд стоящих, и докажем, что в каждой из них был починенный фонарь. Предположим, что в какой-то шестёрке ни один фонарь не был починен. В такой шестёрке не менее двух разбитых фонарей (поскольку в каждой из двух троек, составляющих шестёрку, был разбитый фонарь), между которыми не менее трёх работающих фонарей (так как иначе можно будет указать четыре фонаря, среди которых хотя бы два разбитых). Но как раз трёх работающих фонарей подряд стоять и не может. Пятью отремонтированными фонарями Петров мог обойтись, например, в такой ситуации: до ремонта каждый третий фонарь был разбит, а после ремонта – каждый шестой.

400. 7 землекопов могут прорыть канаву в песке за 3 часа, а 3 землекопа – за 7 с половиной часов. Сколько нужно землекопов, чтобы успеть прорыть канаву за 12 часов, если известно, что ветер всё время равномерно засыпает канаву песком?

Ответ: 2 землекопа. **Решение.** Пусть x – начальное количество песка в канаве, y – количество приносимого песка за час. Тогда, за 3 часа песка в канаве будет x+3y. Этот песок уберут 7 землекопов за 3 часа, значит, за час один землекоп убирает (x+3y)/21 песка. Аналогично, x+7,5yпеска уберут 3 землекопа за 7,5 часов, т.е. каждый землекоп в час уберёт (x+7,5y)/22,5=(2x+15y)/45. Получили уравнение: (x+3y)/21=(2x+15y)/45. Откуда, 45x+135y=42x+315y или 3x=180y, т.е. x=60y. За 12 часов песка в канаве будет x+12y. За час надо будет убирать (x+12y)/12. С этим могут справиться ((x+12y)/12)/((x+3y)/21)=(7/4)(x+12y)/(x+3y) землекопов. Подставляем вместо x 60y, получаем (7/4)(72y)/(63y)=2.

Тема «Разрезания»

100. Клетчатый квадрат 8х8 разрезали на попарно неравные прямоугольники. Каким наибольшим может быть число этих прямоугольников, если все разрезы сделаны по границам клеток?

Ответ: 12.

200. Какое наибольшее число прямоугольников 5х7 можно вырезать из прямоугольника 23х35?

Ответ: 22.

300. Бумажный квадрат требуется разрезать на 27 частей. Каким наименьшим числом прямолинейных разрезов можно обойтись, если для каждого из них, начиная со второго, можно прикладывать друг к другу любые уже имеющиеся части?

Ответ: 5.

400. Каким наименьшим числом плоских разрезов можно разрезать куб на 125 одинаковых кубиков? (Разрешается прикладывать друг к другу любые уже полученные части.)

Ответ: 8.