

Разбор задач 2 тура 1 турнира 7 математической онлайн-игры

Тема «Делимость на 2016»

100. Между некоторыми из цифр числа 123456 поставьте знаки умножения так, чтобы получилось число, кратное 2016.

Ответ (пример): $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 56$.

200. Дважды записав трёхзначное число X , получили шестизначное, делящееся на 2016. Найдите все такие X .

Ответ: 288, 576, 864.

Решение. Шестизначное число, полученное указанным образом, равно $1000X + X = 1001X = 2016Z$, где Z - некоторое натуральное число. Поделив числа 1001 и 2016 на их наибольший общий делитель (7), получим равенство $143X = 288Z$, из которого следует, что X делится на 288.

300. Трижды записав двузначное число Y , получили шестизначное, делящееся на 2016. Найдите все такие Y .

Ответ: 96.

Решение. Задача решается аналогично предыдущей. Имеем равенство $10101Y = 2016Z$, после сокращения принимающее вид $481Y = 96Z$. Числа 481 и 96 взаимно просты, поэтому Y делится на 96.

400. Палиндромом называем натуральное число, одинаково читающееся в обоих направлениях. (Например, 7, 44, 292 и 830038 - палиндромы). Приведите пример палиндрома, кратного 2016.

Ответ (пример): 8026226208.

Указание. Способ построения нужного примера может быть следующим. Беря последовательные кратные 2016 (то есть числа ряда 2016, 4032, 6048, ...), ищем среди них такое, которое не оканчивается нулём, а соответствующее обращённое делится на 7. (Обращёнными называем числа 6102, 2304, 8406 и так далее.) Находим число $2016 \times 13 = 26208$ и обращённое 80262. Число 8026200000 делится на 7, на 9 и на $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$; следовательно, оно делится на $7 \times 9 \times 32 = 2016$. Поэтому на 2016 делится и число $8026200000 + 26208 = 8026226208$, являющееся палиндромом.

Замечание. Участниками игры найдены другие примеры, в частности, число 48384.

Тема «Комбинаторика на шахматной доске»

100. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две одинаковые фишки?

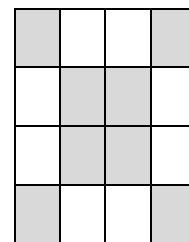
Ответ: 2016.

Решение. Разных позиций с одной фишкой на доске столько же, сколько и клеток на ней - 64. Из каждой такой позиции можно получить 63 позиции, добавив вторую фишку на любую из 63 свободных клеток. Если бы фишки отличались друг от друга, то всего получалось бы 64×63 разных позиций; однако фишки у нас одинаковы, и потому каждые две позиции с одной и той же парой занятых клеток совпадают. Следовательно, искомое количество позиций равно $(64 \times 63):2 = 2016$.

200. Какое наибольшее количество лёгких фигур (коней и слонов) можно разместить на шахматной доске, чтобы никакие фигуры не били друг друга?

Ответ: 32. Пример расстановки – на всех чёрных клетках стоят кони.

Предположим, что можно поставить больше 32 фигур. Тогда, в каком-то угловом квадрате 4×4 надо разместить не менее 9 фигур. Легко показать, что на восьми клетках такого квадрата (4 угла и 4 центральные, на рисунке они тёмные) нельзя поместить более 4 фигур. В самом деле, одних коней – не более 4, т.к. все клетки можно разбить на 4 пары, отстоящих друг от друга на ход коня. Значит, надо поставить хотя бы одного слона. Он будет бить все клетки диагонали. На оставшихся клетках могут поместиться не более двух лёгких фигур (либо один слон, либо 2 коня, которые не будут бить стоящего слона). На оставшихся белых клетках тоже можно поместить не более четырёх фигур. Иначе, рядом должны стоять две фигуры, а на двух смежных сторонах нельзя поставит ни коня, ни слона.



300. Какое наибольшее количество фишек может стоять на доске 7x7 (по одной на клетке), чтобы они одновременно могли перейти в соседнюю по диагонали клетку, и опять оказались по одной на клетке?

Ответ: 42.

Решение. Диагонально расположенные клетки имеют один цвет, и можно решать задачу отдельно на белых и на чёрных клетках.

	1		3		4	
1		3		4		9
	2		5		9	
2		5		8		0
	6		8		0	
6		7		a		б
	7		a		б	

1		2		3		
	1		2		3	
4		5		6		
	4		5		6	
7		8		9		
	7		8		9	

Пусть угловая клетка доски – чёрная. Сначала решим задачу с белыми клетками (слева). Пары клеток, с которых фишки могут пойти на клетку с тем же знаком (поменяться местами). Итак, на белых клетках могут стоять 24 фишки.

Теперь посмотрим на чёрные клетки. Отметим 9 из них тёмным цветом. С оставшихся чёрных клеток на эти клетки могут перейти не более 9 фишек. На тёмных клетках могут стоять фишки. Схема переходов указана на рисунке.

400. Сколькими способами можно поставить 5 ладей на доску 5x5, чтобы все свободные клетки были побиты?

Ответ: $2 \cdot 5^5 - 5! = 6130$

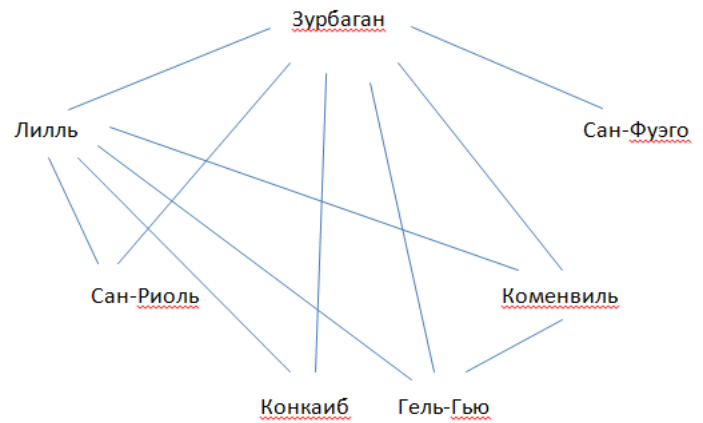
Решение. Все клетки биты, если либо на каждой горизонтали стоит ладья, либо на каждой вертикали стоит ладья. Если есть свободная вертикаль и свободная горизонталь, то клетка на их пересечении не бита. Расставить по одной ладье на всех горизонталях – 5^5 способов. На вертикалях – 5^5 способов. Но среди этих способов есть общие, когда ладьи стоят по одной и на горизонтали, и на вертикали. Таких способов $5!$. Отсюда ответ.

Тема «Графы»

100. В стране Гринландии семь городов. Между некоторыми открыты двусторонние авиалинии. Из Зурбагана самолёты летают по шести направлениям. Из Лилля – по пяти. В Гель-Гью и в Коменвиль можно прилететь из трёх городов в каждый. В Конкаиб и Сан-Риоль – из двух. В Сан-Фуэго – из одного. Куда можно прямым рейсом долететь из Гель-Гью?

Ответ: Лиль, Зурбаган, Коменвиль.

Решение. Будем рисовать граф авиалиний Гринландии. Зурбаган соединяем линиями со всеми оставшимися городами и более не рассматриваем. Сан-Фуэго тоже можно не рассматривать – единственная авиалиния от него проведена. Ещё 4 линии из Лилля проводятся однозначно. Конкаиб и Сан-Риоль тоже можно больше не рассматривать – в них проведены по две линии. Остаются Гель-Гью и Коменвиль, из которых надо провести по одной линии, но кроме как друг к другу, эту линию не провести. Итак, граф полностью построен. Ответ виден из рисунка.



200. Концерт дали пять вокалистов. В каждом музыкальном номере участвовали два певца, причём ни одна пара не повторилась. Оказалось, что все, кроме Плачидо Доваротти и Лучано Поминго участвовали в разном количестве номеров. В скольких номерах выступили Доваротти и Поминго?

Ответ: в двух номерах каждый.

Решение. Чтобы пары не повторились, надо, чтобы каждый певец участвовал не более, чем в 4 номерах. Итак, у четырёх певцов количество участия именно такое: в 1, 2, 3 или 4 номерах. У пятого – одно из этих чисел. Заметим, что сумма этих чисел – чётное число, т.к. в каждый номер входят два певца, и каждый вносит в эту сумму по 1. Чтобы сумма оказалась чётной, надо, чтобы повторилось чётное число, т.е. 2 или 4. Но в 4 номерах (со всеми остальными) двое участвовать не могли, т.к. при этом не могло оказаться человека, участвовавшего только в одном номере. Итак, ответ получен.

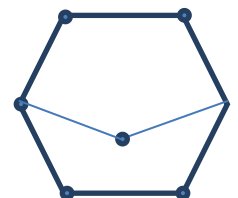
Осталось только привести пример, какие пары певцов выступали в концерте. Обозначим остальных вокалистов: А, Б, В. Программа концерта могла выглядеть так:

(А, Б) (А, В) (А Доваротти) (А Поминго) (В Поминго) (В Доваротти)

300. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что в этой стране есть круговые маршруты длины 5 и 6, но нет длины 3. Какое наименьшее число городов может быть в этой стране?

Ответ: 7.

Решение. Нарисуем цикл длины 6. Добавить ребро, чтобы получился цикл длины 5, но не образовалось цикла длины 3, очевидно, не удаётся. Значит, надо добавить хотя бы одну вершину. Это легко получается.



См. рисунок. Добавленная вершина – внутри шестиугольника.

400. В теннисном турнире играли три команды с одинаковым числом игроков, большим 1. Каждый игрок сыграл с каждым игроком из соперничающих команд. Лучше всех выступила команда «Смелые», её

игроки выиграли в два раза больше игр, чем игроки команды «Сильные», а проиграли в два раза меньше игр, чем игроки команды «Умелые». Какое наименьшее количество игроков могло быть в каждой команде?

Ответ: 7.

Решение. Обозначим за X – количество побед Смелых над Сильными, за Y – количество побед Смелых над Умелыми, Z – количество побед Сильных над Смелыми, T – количество побед Сильных над Умелыми. Учитывая, что игроков во всех командах одинаково, т.е. $X+Z$, условия задачи превращаются в уравнения:

$$X+Y=2(Z+T)$$

$$2(Z+X+Z-Y)=Y+T$$

Исключая T , после преобразований получаем: $10(X+Z)=7(X+Y)$. Отсюда следует, что $X+Z$ кратно 7.

Пример турнира, в котором в каждой команде 7 игроков:

Смелые – Сильные: 6-1

Смелые – Умелые: 4-3

Сильные – Умелые: 4-3