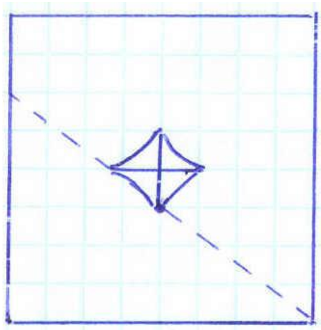
Разбор задач 3 тура 2 турнира 6 математической онлайн-игры

Тема «Множества»

100. Из множества букв {А, Е, И, Л, Н, П, С, Ь} составьте два разных восьмибуквенных слова, входящих в словарь русского языка. Слова должны быть существительными, нарицательными в единственном числе. В каждом слове должна встретиться каждая буква по одному разу.
Ответ: АПЕЛЬСИН, СПАНИЕЛЬ
200. Каких чисел от одного до миллиона больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной?
Ответ: чётных с нечётной суммой цифр на 1 больше.
Решение. Рассмотрим какое-нибудь чётное число меньшее миллиона с нечётной суммой цифр, а также все числа, получаемые из него заменой последней цифры. Среди них ровно 5 чётных чисел с нечётной суммой цифр и 5 нечётных с чётной суммой цифр. Таким образом, все числа меньшие миллиона разбиваются на равные по количеству интересующие нас множества. 1000000 при этом не допускает замены последней цифры. А это – чётное число с нечётной суммой цифр.
300. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый – спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый – математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий – философ. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше и кого меньше: математиков, философов или спортсменов?
Ответ: больше – философов, меньше – математиков.
Решение. Пусть Y – количество тех, кто занимается только одним видом: математикой, философией или спортом. Обозначим за X – количество людей, занимающихся всем. Это 1/4 от математиков, занимающихся философией, т.е. 3X математиков занимаются философией, но не спортом. Аналогично, X – это 1/5 от философов, занимающихся спортом, т.е. 4X спортсменов занимаются философией, но не математикой, а также X – это 1/3 от спортсменов, занимающихся математикой, т.е. 2X спортсменов занимаются математикой, но не философией. Итак, всего математиков: Y+6X, философов: Y+8X, а спортсменов: Y+7X.
400. Концы отрезка длины 5 лежат на границе квадрата 4x4. Укажите множество точек, где может находиться
середина этого отрезка.

Ответ: это множество представлено на рисунке. Оно образует криволинейный «квадратик» и крестик из диагоналей этого квадратика. Пунктиром отмечен отрезок длины 5.



Решение. Если концы отрезка лежат на противоположных сторонах квадрата, т.е. отрезок «скользит» по ним, то его середина скользит по параллельному отрезку. Два таких отрезка образуют крестик в середине квадрата. Если концы отрезка лежат на смежных сторонах и «скользят» по ним, то середина скользит по дуге окружности. И таких дуг тоже четыре.

Тема «Кони»

100. Для награждения участников скачек было выделено 840 призов – кусочков сахара и яблок. Коню – победителю дали несколько кусочков сахара и несколько яблок. Каждому следующему давали на один кусочек сахара и на одно яблоко меньше. Последний получил одно яблоко и два кусочка сахара. Сколько коней участвовало в скачках?

Ответ: 28.

Решение. Последний конь получил три приза, предпоследний – пять, и т.д. Общее число призов – это сумма последовательных нечётных чисел. Известно, что сумма первых N нечётных чисел равна N^2 (например, 1+3=4, 1+3+5=9 и т.д.). В нашем случае в этой сумме не хватает первого слагаемого. Т.к. $840=841-1=29^2-1$ Отсюда, ответ.

200. Кавалерийский взвод выстроен в каре 5х5. Определите, сколько жеребцов среди этих 25 лошадей, если известно, что жеребцов во всех шеренгах поровну, а во всех колоннах – разное количество.

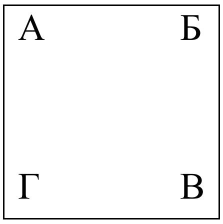
Ответ: 10 или 15.

Ж	Ж			
Ж	Ж			
Ж	Ж			
Ж		Ж		
		Ж	Ж	

Решение. В колоннах жеребцов – разное количество, значит, их не больше 5+4+3+2+1=15 и не меньше 0+1+2+3+4=10. В шеренгах жеребцов одинаковое количество, значит, общее число жеребцов делится на 5. Итак, их 10 или 15. Пример с 10 жеребцами показан на рисунке. Пример с 15 жеребцами получится, если убрать этих жеребцов, а поставить других на все свободные клетки.

300. Четыре коня одновременно стартовали из вершин квадрата и поскакали по его контуру по часовой стрелке. Когда самый быстрый конь завершил полный круг, остальные тоже оказались в вершинах квадрата, причём в каждой вершине по одному. Во сколько раз скорость самого быстрого коня превосходит скорость самого медленного, если во время скачек произошло два обгона?

Ответ: в 2 или в 4 раза.



Решение. Пусть самый быстрый конь проскакал 4 стороны квадрата и закончил бег в вершине А. Самый медленный мог проскакать – 1, 2, 3 или 4 стороны. 4 быть не может, т.к. в этом случае скорости всех коней равны, и обгонов нет вовсе. Покажем, что и 3 быть не может. Пусть такое случилось. Тогда, все кони проскакали по 3 или 4 стороны. Какой конь мог закончить бег в вершине Г? Только тот, кто стоял в А или Г. Но, в А стоял другой конь, значит, у этого коня скорость тоже равна 4. Аналогично, и у остальных скорость равна 4, что невозможно. Остаются случаи 2 или 4. Оба возможны. Вот примеры скоростей у коней А, Б, В, Г: (4, 2, 4, 2) и (4, 1, 1, 2).

400. На доске 4х4 стоят 16 шахматных коней – по одному на клетке. В некоторый момент кони одновременно сделали «коллективный» ход (каждый по шахматным правилам) и опять оказались по одному на клетке. Сколькими способами кони могли сделать этот ход? Два коллективных хода считаются разными, если хотя бы один конь в одном из них пошёл не на ту клетку, что в другом.

Ответ: 256.

Решение. Всех коней разобьём на 4 группы, представленные на рисунках.

К			
		К	
	К		
			К

			К
	К		
		К	
К			

	К		
			К
К			
		К	

		К	
К			
			К
	К		

Любой ход коня не выводит его за пределы своей группы. Легко видеть, что в каждой из групп ровно 4 возможных коллективных хода. Т.е. всего вариантов коллективного хода 4^4=256.

Тема «Степени двойки»

100. Число назовём *нашим*, если оно является разностью степеней двойки. (Например, числа 7, 28 и 32 наши, поскольку 7=8-1, 28=32-4, 32=64-32.) Укажите все наши числа между 2000 и 3000.

О т в е т: 2016, 2032, 2040, 2044, 2046, 2047, 2048. У к а з а н и е. Задача решается методом перебора.

200. Найдите все чётные четырёхзначные числа X, обладающие следующим свойством: если X делится на простое число p, то X-1 делится на p-1.
О т в е т: 1024, 2048, 4096, 8192. Р е ш е н и е. Число X-1, будучи нечётным, может иметь только нечётные делители. Следовательно, если p - простой делитель числа X, то p-1 нечётно. А тогда p чётно, откуда p=2. Поэтому X - степень двойки.
300. Некоторые из чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 красные, остальные синие, причём сумма красных на 33 больше суммы синих. Укажите наименьшее красное число.
О т в е т: 16.
Р е ш е н и е. Пусть r - сумма всех красных чисел, а s - сумма всех синих. Тогда r+s = 1+2+...+1024 = 2047, r-s = 33. Решив полученную систему, найдём r = 1040. После этого нетрудно установить, что красными являются только 1024 и 16.
400. На берегу моря есть 1000 камешков. Двое играющих ходят по очереди, а за один ход можно выбросить в море 1, 2, 4, 8, ... (любую степень двойки) камешков. Проигрывает тот, кому нечего выбрасывать. Докажите, что начинающий может обеспечить себе выигрыш. Сколько камешков для этого можно выбросить первым ходом? (Укажите все возможности, не упускающие выигрыш.)
О т в е т: 1, 4, 16, 64 или 256.
Р е ш е н и е. Начинающий выиграет, если каждым ходом будет оставлять противнику число камешков, кратное 3. Для этого число камешков, выброшенных первым ходом, должно давать остаток 1 при делении на 3 (поскольку остаток 1 даёт 1000). Далее начинающий может придерживаться правила: если противник выбрасывает 1, 4, 16, 64 или 256 камешков, то нужно выбросить 2, а если противник выбрасывает 2, 8, 32, 128 или 512, то нужно выбросить 1.