

Разбор задач 1 тура 2 турнира 6 математической онлайн-игры

Тема «Графы»

100. В компании из 5 человек только у Вовы и Димы одинаковое число друзей, а у всех остальных – разное. Сколько друзей у Вовы?

О т в е т: 2. У к а з а н и е. Искомое число можно найти перебором вариантов.

200. К теннисному столу подошли всего 13 учеников из 6А и 6Б классов. Каждый ученик 6А сыграл с каждым учеником 6Б. Оказалось, что ученики 6А одержали ровно в 6 раз больше побед, чем ученики 6Б. Сколько всего игр было сыграно?

О т в е т: 42. Р е ш е н и е. Искомое число равно произведению числа учеников из 6А на число учеников из 6Б, то есть - произведению двух натуральных чисел, сумма которых равна 13. Кроме того, оно делится на 7, поскольку ровно в 7 раз больше числа игр, выигранных учениками 6Б. Это значит, что было сыграно $7 \times 6 = 42$ игры.

300. В баскетбольном турнире участвуют 20 команд. В каждом туре играют все команды, причём с соперниками, с которыми ещё не играли. Сколько туров нужно сыграть, чтобы гарантированно нашлись 3 команды, сыгравшие между собой каждая с каждой?

О т в е т: 11. Р е ш е н и е. 11 сыгранных туров гарантируют наличие указанной тройки команд. В самом деле, пусть А и В - любые две команды, сыгравшие между собой. Тогда каждая из них сыграла с 10 (то есть - с большинством) из 18 остальных. Поэтому найдётся команда (и даже не одна), сыгравшая как с А, так и с В.

А 10 туров может оказаться недостаточно, что показывает следующий пример. Пусть команды пронумерованы числами от 1 до 20, и каждая команда, имеющая номер от 1 до 10, сыграла со всеми командами, имеющими номера от 11 до 20.

400. В кадетском классе есть девочки и мальчики. Среди любых троих учеников класса – нечётное число пар друзей (либо одна, либо все три). Сколько учеников в этом классе, если у каждого мальчика 7 друзей, а у каждой девочки – 10?

О т в е т: 19. Р е ш е н и е. Из условия следует, что любые два друга каждого мальчика дружат между собой. Поэтому в классе есть 8 попарно дружащих мальчиков. По аналогичным причинам можно утверждать, что есть и 11 попарно дружащих девочек. Других, не входящих в две указанные группы,

учеников нет, поскольку в противном случае в классе нашлись бы трое, среди которых 0 (т. е. - чётное число) пар друзей.

Тема «Принцип Дирихле»

100. В ящике лежат перчатки двух цветов – по 10 пар каждого цвета. Сколько перчаток надо вытащить наугад, чтобы среди них нашлась правильная пара (на левую и на правую руку одного цвета)?

О т в е т: 21. Р е ш е н и е. 20 вытащенных перчаток являются, вообще, говоря, недостаточным количеством, поскольку они могут быть, например, все левыми. С другой стороны, если вытащить 21 перчатку, то среди них найдутся 11 одного цвета, а среди этих 11 - две на разные руки.

200. В каждую клетку таблицы 3×3 записали числа: 0 или 1. Сколько разных значений может быть среди 6 чисел – сумм по строкам и сумм по столбцам?

О т в е т: от 0 до 3.

Примером может быть следующая таблица:

1 строка: 0 0 0

2 строка: 0 1 1

3 строка: 1 1 1

300. 7 голодных волков утащили из фермерского хозяйства несколько овец (каждый - хотя бы одну). Оказалось, что у каждого волка – разное число добытых овец. При каком числе пропавших у фермера овец можно однозначно вычислить, сколько овец досталось самому удачливому волку?

О т в е т: 28 или 29. Р е ш е н и е. Ясно, что пропало не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7=28$ овец, а если их пропало ровно 28, то самый удачливый волк утащил в точности 7. Нетрудно установить также, что он утащил в точности 8, если пропало 29. Предположим теперь, что волки утащили $29+n$ овец, где n - некоторое натуральное число. Однозначно сказать, сколько досталось самому удачливому, в этом случае нельзя. В самом деле: из разложений $29+n = 1+2+3+4+5+6+(8+n) = 1+2+3+4+5+6+7+(7+n)$ видно, что он мог утащить как $(8+n)$, так и $(7+n)$ овец.

400. На доске написано 8 различных натуральных чисел, не превышающих 15. Выбираются всевозможные пары из этих чисел, и вычисляется их разность. Для какого наибольшего значения X можно гарантированно утверждать, что среди этих разностей есть X одинаковых?

О т в е т: 3. **Р е ш е н и е.** Количество разностей совпадает с числом пар чисел и равно $(8 \times 7) / 2 = 28$. Эти разности могут иметь значения от 1 до 14, последнее из которых может давать только одна пара чисел (15 и 1). Для остальных 27 пар остаётся 13 возможных значений разностей; по принципу Дирихле найдутся 3 пары с одной и той же разностью. С другой стороны, если написаны, например, числа, 1, 2, 3, 6, 8, 10, 13 и 14, то ни одно из значений разности не встретится более трёх раз.

Тема «Точные квадраты»

100. Укажите какое-нибудь натуральное число, квадрат которого оканчивается на 2016.

О т в е т: Примером может служить число 4004, квадрат которого равен 16032016.

200. Найдите все точные квадраты, десятичная запись которых состоит только из нечётных цифр.

О т в е т: 1 или 9. **У к а з а н и е.** Квадраты нечётных чисел обладают двумя известными свойствами: 1) они оканчиваются на 1, 5 или 9; 2) при делении на 4 дают остаток 1. Отсюда нетрудно вывести, что если нечётное число больше 3, то предпоследняя цифра его квадрата чётна.

300. Число 1234567 представьте в виде суммы наименьшего возможного количества точных квадратов.

О т в е т: $1234321 + 196 + 25 + 25$. (Существуют и другие примеры представления.)

Р е ш е н и е. Остаток от деления точного квадрата на 8 может быть равен только 0, 1 или 4. Поэтому, какие бы три целых числа ни взять, сумма их квадратов при делении на 8 не может дать остаток 7. А число 1234567 даёт именно такой остаток и, следовательно, не может быть представлено в виде суммы трёх квадратов.

400. В шеренге лицом к капралу - 1000 солдат, пронумерованных числами от 1 до 1000. Капрал командует "Кратные 2, кругом!", и все солдаты с чётными номерами поворачиваются кругом. После этого следует команда "Кратные 3, кругом!", и поворачиваются солдаты с номерами, кратными 3. Затем звучит "Кратные 4, кругом!" и так далее, вплоть до команды "Кратные 500, кругом!". Сколько солдат после всех команд будет, как и вначале, стоять лицом к капралу?

О т в е т: 513. Р е ш е н и е. Воспользуемся следующим известным фактом: натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда количество его натуральных делителей нечётно. В задаче нам нужно сосчитать солдат, поворачивавшихся чётное число раз. К таковым относятся: солдат № 1 (не поворачивался ни разу), солдаты, чьи номера являются квадратами, не превосходящими 500 (поворачивались чётное число раз, поскольку команды "Кратные 1, кругом!" не было) и солдаты, чьи номера больше 500 и квадратами не являются. Всего набирается $1+21+491=513$ солдат.