

## Разбор задач 1 тура 1 турнира 6 математической онлайн-игры

### Тема «Свойства числа 2016»

**100.** При помощи только скобок сделайте равенство  $1:2:3:4:6:7:8 = 2016$  верным.

**Ответ:**  $1:(((2:3):4):6):7):8).$

**200.** На шахматную доску ставят двух белых ферзей. Сколько разных позиций при этом может получиться?

**Ответ:** 2016. Р е ш е н и е. Разных позиций с одним ферзём на доске столько же, сколько и клеток на ней - 64. Из каждой такой позиции можно получить 63 позиции, добавив второго ферзя на любую из 63 свободных клеток. Если бы ферзи отличались друг от друга, то всего получалось бы  $64 \times 63$  разных позиций; однако ферзи у нас одинаковы, и потому каждые две позиции с одной и той же парой занятых клеток совпадают. Следовательно, искомое количество позиций равно  $(64 \times 63):2 = 2016$ .

**300.** В таблице  $3 \times 3$  расставляют все цифры от 1 до 9, после чего складывают все 6 трехзначных чисел, которые получаются, если прочитать цифры какой-либо строки слева направо или цифры какого-либо столбца сверху вниз. Приведите пример, когда эта сумма оказывается равной 2016. (В ответе укажите 6 соответствующих трехзначных чисел.)

**Ответ:** 124, 397, 586, 135, 298, 476. (Существуют и другие наборы.)

**400.** Какие ещё (кроме 2016) натуральные числа можно получить, расставив скобки в выражении  $1:2:3:4:6:7:8$  ?

**Ответ:** 14, 56, 126, 224. Р е ш е н и е. Выражение со скобками может быть преобразовано в обыкновенную дробь, в числителе которой стоит произведение некоторых из чисел 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, а в знаменателе - произведение остальных. (Например, выражение, служащее ответом к задаче 100, можно преобразовать в дробь  $(1 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8)/2$ .)

Ясно, что 1 будет в числителе, а 2 - в знаменателе такой дроби; кроме того, если дробь равна целому числу, то нетрудно заметить, что 7 и 8 должны быть в числителе, а 6 может быть в знаменателе только при условии, что там нет ни 3, ни 4. С учётом сказанного, пригодными остаются только дроби  $(1 \times 6 \times 7 \times 8)/(2 \times 3 \times 4)$ ,  $(1 \times 3 \times 4 \times 7 \times 8)/(2 \times 6)$ ,  $(1 \times 3 \times 6 \times 7 \times 8)/(2 \times 4)$  и  $(1 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8)/(2 \times 3)$ , равные  $((1:2):3):(((4:6):7):8)=14$ ,  $(1:((2:3):4)):((6:7):8)=56$ ,  $(1:(2:3)):(((4:6):7):8)=126$  и  $(1:2):(((3:4):6):7):8=224$  соответственно.

### Тема «Делимость»

**100.** В числе 12345678 переставьте цифры так, чтобы получилось число, делящееся на 2016.

**Ответ:** 57361248. (Возможны и другие варианты.)

**200.** Число 20 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых равно также 20. Каким может быть количество этих натуральных чисел? (Укажите все возможности.)

**Ответ:** 10, 13 или 14. У к а з а н и е. Выписав разложения  $20=2 \times 10$ ,  $20=4 \times 5$  и  $20=2 \times 2 \times 5$ , каждый из наборов множителей (2,10), (4,5) и (2,2,5) дополняем единицами в таком количестве, чтобы сумма чисел в наборе стала равной 20.

**300.** Перемножив все натуральные числа от 1 до 30, получили многозначное число. Найдите цифру в разряде миллионов этого числа.

**Ответ:** 0. У к а з а н и е. Произведение первых 30 натуральных чисел делится на  $(2 \times 5) \times (4 \times 25) \times (6 \times 15) \times 10 \times 20 \times 30 = 10 \times 100 \times 90 \times 6000 = 540000000$ .

**400.** В клетках таблицы  $4 \times 4$  расставили числа 1, 2, ..., 16, после чего для каждой строки и каждого столбца вычислили произведение соответствующих чисел. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего общего делителя полученных восьми произведений.

**Ответ:** 24. Р е ш е н и е. НОД всех произведений не может делиться на 5, поскольку среди чисел от 1 до 16 только три делятся на 5 и потому найдётся строка, где ни одно из чисел (а значит, и их произведение) не делится на 5. Аналогично устанавливаем, что рассматриваемый НОД не может делиться на 7, 11 и 13. Следовательно, его простыми делителями могут быть только 2 и 3.

Поскольку количество двоек в разложении произведения всех чисел таблицы на простые множители равно 15 (по одной двойке дают числа 2, 6, 10 и 14, по две - 4 и 12, три - 8, четыре - 16), то найдётся строка, в разложении произведения чисел которой на простые множители будет не более трёх двоек. Такое произведение (а значит, и НОД всех произведений) не делится на  $2 \times 2 \times 2 \times 2$ . Аналогичными (даже более простыми) можно установить, что рассматриваемый НОД не делится на  $3 \times 3$ . С другой стороны, можно привести пример расстановки, когда этот НОД делится на  $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ . (В первую строку ставим (слева направо) 2, 1, 3, 4, во вторую - 5, 6, 8, 7, в третью - 12, 10, 11, 9, в четвёртую - 13, 16, 15, 14.)

### Тема «Шашки»

**100.** Какое наибольшее число дамок, ни одна из которых не была бы под боем другой, можно поставить на крайние клетки доски?

**Ответ:** 5. У к а з а н и е. На самой большой диагонали и на каждой из параллельных ей диагоналей должно стоять не больше, чем по одной дамке. С другой стороны, расстановка дамок на полях b2, d2, f2, c7 и e7 нужным свойствам удовлетворяет.

**200.** Приведите пример, когда дамка одним ходом побивает 12 шашек. (В ответе общепринятой шахматной нотацией перечислите поля, занимаемые побиваемыми шашками.)

**Ответ:** шашки на полях f2, d2, b2, b4, b6, d4, g5, g7, e7, c7, e5, g3 последовательно бьются дамкой, двигающейся по маршруту g1-e3-c1-a3-c5-a7-e3-h6-f8-d6-b8-f4-h2.

**300.** Какое наименьшее число дамок можно поставить на доску так, чтобы все свободные крайние клетки доски оказались под боем?

**Ответ:** 3. У к а з а н и е. Дамки, поставленные на c3, d6 и e3, бьют все свободные крайние клетки. Для доказательства минимальности числа дамок с таким свойством рассмотрим "кольцо" из 10 клеток: b2, b4, b6, c7, e7, g7, g5, g3, f2, и d2. Так как никакая дамка не сможет контролировать (то есть - занимать либо бить) больше 4 клеток этого "кольца", то только для контроля над "кольцом" требуется не меньше трёх дамок.

**400.** Какое наименьшее число простых шашек можно поставить на доску так, чтобы все свободные крайние клетки доски оказались под боем?

**Ответ:** 5. Р е ш е н и е. Все крайние клетки можно взять под контроль 5 шашками, поставленными, например, на c3, c7, d4, g3 и g7. Объясним, почему меньшим числом шашек обойтись нельзя. В самом деле: требуется не меньше двух шашек для контроля над группой клеток b2, b4, b6, не меньше двух других - для контроля над группой f2, e3, f4, g3, и при этом ни одна из шашек, участвующих в контроле над указанными группами, не будет контролировать, например, клетку g7.