Разбор задач 3 тура 2 турнира 5 математической онлайн-игры

Тема «Алгебра»

100. От в е т: a=1, b=4, c=7 или a=2, b=2, c=8. У к а з а н и е. Достаточно вспомнить, например, что 366 - число дней в високосном году.

200. О т в е т: x=0, y=0; x=1, y=8. У к а з а н и е. Умножив обе части данного равенства на 10, получим равенство 2(x+y)=10x+y, которое преобразуется к виду y=8x.

300. О т в е т: k+m+n+p+q. Р е ш е н и е. Из условия следует, что k-m учеников получили ровно по одной двойке, m-n - ровно по две, n-p - ровно по три, p-q - ровно по четыре. Поэтому искомое число равно k-m+2(m-n)+3(n-p)+4(p-q)+5q=k+m+n+p+q.

400. О т в е т: 250000. Р е ш е н и е. Пусть a, b, c, d, e, f - число жителей в A, B, C, D, E, F соответственно. Тогда d=e+f, c=d+e=2e+f, b=c+d=3e+2f, a=b+c=5e+3f; кроме того, 1000000=a+b+c+d+e+f=12e+8f=4(3e+2f)=4b. Следовательно, в городе B живёт 1000000:4=250000 человек.

Тема «Домино»

100. О т в е т: 8. Р е ш е н и е. Искомое число больше 7, поскольку комплект домино содержит 7 дублей, никакие два из которых приставить друг к другу нельзя. С другой стороны, если взять любые 8 костей, то хотя бы одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 встретится на двух (или больше) костях.

200. О т в е т: 10. У к а з а н и е. Соответствующим примером служит такая цепочка из 10 костей: (0,0), (0,1), (1,2), (2,0), (0,3), (3,4), (4,0), (0,5), (5,6), (6,0).

300. О т в е т: 8. Ре ш е н и е. Пусть имеется 8 костей. Выберем одну из них и, если к ней можно приставить какую-нибудь другую, сделаем это; если же приставить ничего нельзя, то выбранную кость кладём отдельно от остальных. Получим, таким образом, "цепочку" из 1 или 2 костей. Затем из оставшихся (7 или 6) костей точно так же выделяем другую "цепочку" из 1 или 2 костей и так далее. В итоге получится 4 или большее количество коротеньких "цепочек". Для каждой из этих "цепочек" выпишем числа очков на её концах. (Если "цепочка" состоит из 1 кости-дубля, то выписываем только одно число.) Будет выписано не меньше, чем 8 чисел, следовательно, среди них найдутся хотя бы два равных. Это значит, что соответствующие "цепочки" можно соединить, получив, тем самым, цепочку из 3 или 4 костей.

400. О т в е т: 11. У к а з а н и е. 10 костей, вообще говоря, недостаточно, поскольку их набор, может оказаться, например, таким: (0,0), (0,1), (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4), (4,5), (5,5), (6,6). Доказательство того, что среди 11 костей обязательно найдутся 4, выстраиваемые в цепочку, можно провести так же, как это (для 8 костей и 3-звенной цепочки) сделано в решении предыдущей задачи.

Тема «Неравенство треугольника»

100. О т в е т: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

200. О т в е т: 12. Р е ш е н и е. Пусть отрезки пронумерованы в порядке возрастания их длин. Тогда длина третьего отрезка больше или равна 1+1=2, длина четвёртого - больше или равна 1+2=3, а длина пятого - больше или равна 2+3=5. Получается, что сумма всех длин больше или равна 1+1+2+3+5=12. С другой стороны, набор отрезков длинами 1, 1, 2, 3, 5 условию задачи удовлетворяет.

300. О т в е т: 15. Ре ш е н и е. Заметим, что если из трёх выбранных палочек треугольник составить можно, то длины двух наиболее длинных (из этих трёх) палочек равны. Если две длинные палочки равны по 2 см, то имеется ровно один треугольник (2,2,1), если по 5 см, то два ((5,5,1) и (5,5,2)), если по 10 см, то три, если по 25 см, то четыре, а если по 50 см, то пять треугольников. Всего, таким образом, набирается 1+2+3+4+5=15 разных треугольников.

400. О т в е т: 6. У к а з а н и е. При n=6 в качестве примера можно взять выпуклый равносторонний шестиугольник ABCDEF, вершины B, C, E и F которого расположены очень близко к диагонали AD - так, что расстояния от этих вершин до прямой AD значительно меньше длины отрезка AD. (Из диагоналей AD, BF и CE такого шестиугольника треугольник сложить нельзя.) Доказательство же того, что из любых трёх диагоналей выпуклого пятиугольника треугольник складывается, можно провести, опираясь на следующие два факта: 1) только одна из диагоналей такого пятиугольника может быть короче его стороны, 2) эта самая короткая диагональ больше разности любых двух других диагоналей.