

Занятие 1.8. Клетчатые задачи

Методические указания для учителей

Краткие указания и ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску восемь ладей с написанными на них номерами от 1 до 8, чтобы они не били друг друга? Чем эта задача отличается от разобранной на занятии, т.е. когда все ладьи одинаковые?

Ответ: $(8!)^2$. Любой способ расстановки ладей, найденный в предыдущей задаче, порождает 8! различных способов расстановки этой задачи. Действительно, любая перестановка ладей друг с другом, при которой они все вместе занимают те же поля – это новый вариант расстановки.

Можно решить задачу и по-другому. Ладью №1 можно поставить на любую из 64 клеток доски. Ладью №2 – на 49 клеток, не побитых первой ладьёй (на все, кроме одной вертикали и одной горизонтали). Ладью №3 – на 36 клеток и т.д. Перемножив, получим тот же ответ.

2. Сколькими способами можно раскрасить все клетки шахматной доски в два цвета, чтобы не нашлось трёх подряд одноцветных клеток, идущих по вертикали, горизонтали или диагонали?

Ответ: 8. Докажем, что при нашей раскраске нет одноцветных уголков из трёх клеток. Пусть это не так. Рассмотрим такой чёрный уголок, стоящий не у края доски. Тогда клетки, помеченные цифрой 1 – белые. А клетки, помеченные цифрой 2 – чёрные. Но это противоречит условию. Итак, во всех внутренних клетках нет одноцветных уголков. Теперь рассмотрим две смежные одноцветные клетки (см. нижний рисунок). Если таких нет, то раскраска – шахматная, и любые три клетки по диагонали – одноцветные, что запрещено. Тогда клетки с цифрой 1 – другого цвета, а значит, клетки с цифрой 2 – первого, и т.д. Итак, наша раскраска во всех внутренних клетках однозначно построена. Она представляет собой систему однонаправленных доминошек, цвет которых чередуется в шахматном порядке. Нетрудно подсчитать, что таких раскрасок доски всего 8 – по 4 с вертикальной и горизонтальной направленностью. Способы различаются начальным положением одной из доминошек.

Осталось нанести последний штрих – разобраться с краем доски. Легко заметить, что если внутренний квадрат 6х6 раскрашен по отмеченным правилам, то крайние клетки допускают единственную раскраску, и она подчиняется этим же правилам.

3. Разрезать изображённую фигуру на 2 части, из которых можно сложить целый квадрат 8х8.

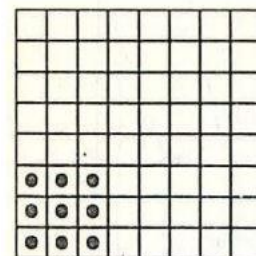
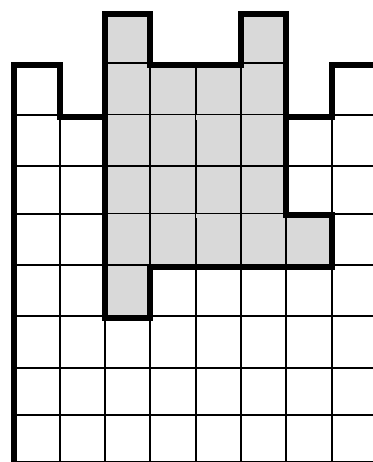
Решение на рисунке слева. Надо вырезать серую фигуру, повернуть её на 90 градусов по часовой стрелке и положить на место.

4. На доске размером 8х8 клеток в левом нижнем углу в виде квадрата 3х3 стоят девять фишек (см. рис.). За один ход разрешается какой-нибудь одной фишке перепрыгнуть через какую-нибудь другую фишку на клетку, симметричную первой фишке относительно второй (если эта клетка свободна). Можно ли после нескольких таких ходов собрать все фишки в виде квадрата 3х3

1) в левом верхнем углу доски;

			1	1	
		2		2	
	1				1
	1	2	1		

		2	2		
	2	1	1	2	
	1				1
2	2	1	1	2	2



2) в правом верхнем углу доски?

Ответ 1): нет. При перемещениях фишки не меняют цвет поля, на котором стоят, т.е. количество фишек, стоящих на чёрных полях, не должно поменяться. Но, в начальной и конечной позициях количество чёрных клеток разное.

Ответ 2): нет. Занумеруем горизонтали снизу вверх: первая, вторая, и т.д. При перемещениях фишки не меняют чётности номера горизонтали. Но, в начальной позиции шесть фишек стоят на нечётных горизонталях, а в конечной – только три.

5. Покрасить клетки доски 5x5 в 5 цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке все цвета встречались ровно по одному разу.

Чтобы получить решение, надо провести небольшой перебор. Объём перебора сильно зависит от его организации. Вот пример, когда перебор минимален. Покрасим сразу в 5 цветов целый блок (рис. снизу слева). Клетка X не должна иметь цвет 1, 2, 4, 5, т.е. иметь цвет 3. В верхнем светло-сером блоке должен быть цвет 3, но не во втором ряду, значит, в первом.

1				
2	3			
X	4	5		
			Y	
				Z

Тёмно-серая правая фигура должна иметь цвет 3, и это может быть только клетка Y. Но, тогда и клетка Z имеет цвет 3. Если далее провести рассуждение про цвет 2, то решение заканчивается в две строчки. Итак, ответ единственный, и он на рисунке снизу справа.

1	5	3	2	4
2	3	1	4	5
3	4	5	1	2
5	2	4	3	1
4	1	2	5	3

6. Разрезать изображенную на рисунке доску на 4 одинаковые части, чтобы каждая из них содержала 3 серые клетки.

Ответ на рисунке.

