

Семейная математическая онлайн-олимпиада «От А до Я»

14 мая 2021 года

Ответы к задачам финала

Василий Петрович и часы

100.

Василий Петрович увидел, что часовая и минутная стрелки образуют прямой угол? Через сколько минут это может повториться?

Ответ: 360/11 мин (~32 мин 33 сек)

200.

Василий Петрович задумался: если бы минутная стрелка стала ходить против часовой стрелки, то во сколько раз чаще по сравнению с обычными часами она встречалась бы с часовой?

Ответ: 13/11 (~1,18)

300.

Василий Петрович заметил, что часы в его кабинете сломались. Часовая стрелка продолжала ходить правильно, а минутная и секундная – с другими скоростями. Кроме того, секундная стрелка стала ходить в противоположную сторону. В 12:00 все три стрелки стояли против числа 12.

Секундная стрелка впервые встретила минутную на числе 4, а часовую – на числе 2. На каких цифрах могут встретиться все три стрелки?

Ответ: 4, 8, 12

400.

Ровно в полдень Василий Петрович начал следить за стрелками часов. Его внимание сначала сосредоточилось на секундной стрелке, ушедшей вперёд. При любом обгоне стрелок, если Василий Петрович следил за одной из стрелок, участвующей в этом обгоне, его взгляд переходил на другую стрелку (обгоняющую или обгоняемую). Сколько кругов по циферблату сделал взгляд Василия Петровича до полуночи?

Ответ: 245

Игры

100.

Какой первый ответный ход в игре «крестики-нолики» на доске 3x3 даёт возможность второму игроку не проиграть, если первый сходил в угол?

Ответ: только в центр

200.

На второй горизонтали доски 5x5 стоят белые шашки, а на четвёртой – чёрные (см. рисунок). За один ход можно передвинуть шашку своего цвета в своей вертикали на любое количество клеток вперёд или назад, не перепрыгивая шашку соперника и не сходя с доски. Кто не может сделать хода – проигрывает. Ходят по очереди, начинают белые. Кто может выиграть, и как для этого надо играть? Опишите 2-3 хода.

●	●	●	●	●
○	○	○	○	○

Ответ: Выигрывает первый. Первым ходом он ходит любой шашкой (например, первой) вперёд, а далее разбивает вертикали на пары и на любой ход чёрных отвечает в парной вертикали, делая ходы только вперёд так, чтобы расстояния между шашками (своей и противника) в парах были одинаковы. Если же чёрные отойдут назад в первой вертикали, то надо запереть его шашку.

300.

Имеется две кучки спичек: в первой - 33, во второй - 58. Играют двое, ходят поочерёдно. За один ход игрок должен уменьшить число спичек в одной из кучек так, чтобы число оставшихся не было делителем числа спичек в другой кучке и не делилось на него. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Какой из игроков, первый или второй, может обеспечить себе победу? Сколько спичек он должен взять вначале, и как играть дальше?

Ответ: Выигрывает первый. После каждого его хода он должен оставить пару кучек, в которых $2k$ и $2k+1$ спичек. В частности, первым ходом он должен оставить кучки с 32 и 33 спичками. Вторым должен нарушить это свойство, а первый всегда может его восстановить. Позиция (2,3) возникнет после хода первого игрока.

400.

В больнице три палаты по 33 пациента в каждой и три пустые палаты. Два врача дежурят через день поочерёдно и играют в такую игру. В начале своей смены врач выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть — первый или второй?

Ответ: Первый. Его стратегия. Он делает так, что после его хода количество пациентов во всех непустых палатах будет давать остаток 1 при делении на 3. Если второй видит только палаты вида $3k+1$, то при любом разбиении числа вида $3k+1$ на 2 или 3 слагаемых, обязательно есть слагаемое вида $3n$ или $3n+2$. В каждом из этих случаев первый может сделать ход согласно своей стратегии ($3n \rightarrow 1, 1, 3n-2$ или $3n+2 \rightarrow 1, 3n+1$).

Первым ходом первый делит одну палату на три палаты, например, по 1, 1, 31 пациенту.

Геометрия и комбинаторика на кухне

100.

Шесть стеклянных банок с водой поставлены в три ряда по две банки в каждом. Вид спереди на эти банки показан на рисунке а, а вид слева — на рисунке б. (Через стекло просматриваются уровни воды в каждой видимой банке и во всех банках, стоящих за ней.) Запишите следующее четыре числа: 1) число полных банок, 2) число наполовину заполненных банок, 3) число почти пустых банок, 4) число пустых банок.



Рис. а



Рис. б

Ответ: 2, 2, 1, 1. (В левом ряду в порядке удаления стоят полная и две наполовину заполненные, в правом — почти пустая, полная и пустая.)

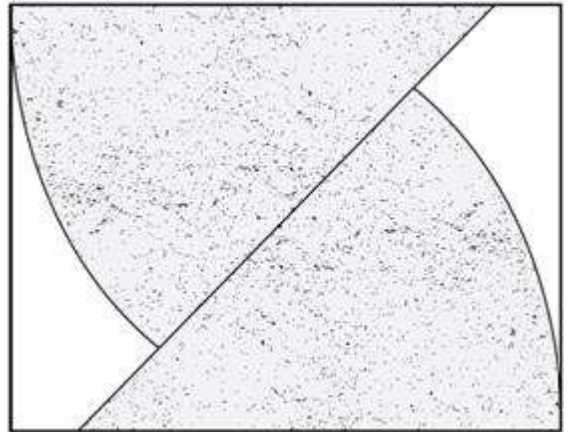
Семейная математическая онлайн-олимпиада «От А до Я»

14 мая 2021 года

Ответы к задачам финала

200.

Две «восьмушки» круглой пиццы радиуса 1 уложены в прямоугольную коробку так, как это показано на рисунке. Каким может быть периметр коробки?



Ответ: 4

300.

Грейпфрут имеет форму шара диаметром 11 см, а толщина кожуры в нём составляет 1 см. Каким наименьшим числом плоских разрезов можно срезать верхний слой кожуры, не затронув мякоти грейпфрута?

Ответ: 12

400.

Мама печёт семь пирожков с семью разными начинками. Пока она этим занимается, в кухню иногда прибегают дети, и каждый раз съедают самый горячий пирожок. Найдите число последовательностей, в которых могут быть съедены все пирожки.

Ответ: 429