Разбор задач 3 тура 9 математической онлайн-игры

Линейка «Логика»

100. В комнате было несколько человек. Один сказал: «Нас тут пятеро» – и ушёл. После этого каждую минуту кто-то уходил, сказав на прощание: «Все, кто ушел до меня, перед уходом солгали», пока комната не опустела. Какими по счёту уходили сказавшие правду? Укажите все возможности.
Ответ: Первым или вторым
Решение. Если первый сказал правду, то все остальные солгали. Если первый солгал, то второй сказал правду, а остальные солгали.

200. В тетради записано 101 утверждение:

1. Среди всех этих утверждений не больше одного правильного.
2. Среди всех этих утверждений не больше двух правильных.
3. Среди всех этих утверждений не больше трёх правильных.

…

101. Среди всех этих утверждений не больше ста одного правильного.

Сколько всего правильных утверждений?
Ответ: 51
Решение. Пусть верных утверждений ровно K. Тогда все утверждения, начиная с K-го, верные. Всего их 102-K, т.е. 102-K=K. Отсюда ответ.

300. На школьной олимпиаде по математике давалось 9 задач. Участвовало 10 шестиклассников, и все решили разное число задач. На следующий день каждого из них спросили, сколько задач он решил и каждый назвал одно из чисел от 1 до 9. Сумма их ответов оказалась равна 64. Какое наименьшее число врунишек могло быть?
Ответ: 3
Решение. Сумма ответов, если бы все они были правдивыми, была бы 45. Значит, несколько человек назвали суммарно на 19 больше. Один шестиклассник не мог увеличить реальную цифру больше чем на 9, значит, по крайней мере, солгали трое. Такое могло быть, например, вместо 0 было сказано 9, вместо 1 было сказано 9, вместо 2 было сказано 3.

400. Президент назначил новое правительство. В него вошли два министра, два их заместителя и сам президент. Их фамилии Волков, Зайцев, Муравьёв, Соловьёв и Дятлов.
Министры ничего не знают: ни кто кем назначен, ни, даже того, кто сейчас президент. Заместители знают только друг друга. Президент знает каждого. Заместители министров всегда лгут. Президент и министры говорят правду.
На первом заседании все сделали такие заявления:
Зайцев: «Я не знаю, кто Дятлов»;
Дятлов: «Я знаю, кто президент»;
Волков: «Я знаю, кто Зайцев»;

Соловьёв: «Я знаю, что Волков – президент».
Кто Муравьёв?
Ответ: Министр (При этом, Дятлов – президент, Зайцев – министр, остальные – заместители.)
Решение основывается на переборе, ускоренном логическими выводами. Например, Соловьёв не может говорить правду, значит, он заместитель министра. Дятлов либо говорит правду (тогда он президент), либо лжёт (тогда он второй заместитель министра).

Линейка «Наибольший общий делитель»

100. Сократите дробь 47027/3699963.

Ответ: 31/2489.

Указание. Так как 3699963 = 3*1233321 = 3*111*11111 = 3*3*37*41*271, то проверяем делимость числителя на 3, 37, 41 и 271. Выяснив, что 47027 = 31*37*41, сократим дробь.

200. Найдите наибольшее число, которое в целое число раз меньше каждой из дробей 35/54 и 65/72.

Ответ: 5/216.

Указание. Искомое число - несократимая дробь, числитель которой должен быть наибольшим общим делителем чисел 35 и 65, а знаменатель - наименьшим общим кратным чисел 54 и 72.

300. Какое наименьшее количество жидкости можно отмерить при помощи сосудов ёмкостью 3,5 л и 0,75 л?

Ответ: 0,25 л.

Решение. Поскольку 0,25 л - объём, который в целое число раз меньше ёмкости каждого из наших сосудов, то после любых переливаний количество жидкости в каждом сосуде будет кратно 0,25 л. Покажем, как отмерить 0,25 л. Наполняем меньший сосуд и переливаем 0,75 л из него в больший; эту операцию проделываем 4 раза. В результате в большем сосуде станет 3 л жидкости. Наполнив меньший сосуд ещё раз, доливаем из него 0,5 л в больший. В меньшем останется 0,25 л.

400. Миллион вирусов и миллиард бактерий распределены по пробиркам. В одной из пробирок один вирус и одна бактерия, а во всех остальных один и тот же набор вирусов и бактерий. Каким наименьшим может быть число пробирок?

Ответ: 1000.

Решение. В пробирках с одинаковым набором вирусов и бактерий находится 999999 вирусов и 999999999 и бактерий. Поэтому число таких пробирок является общим делителем каждого из чисел 999999 и 999999999. А поскольку любой их общий делитель не превосходит НОД (999999, 999999999) = 999, то общее число пробирок не превосходит 999+1 = 1000. Оно равно в точности 1000, если в 999 пробирках находится по 1001 вирусу и 1001001 бактерии.

Линейка «Про ферзей»

100. Какое наибольшее число ферзей можно поставить на доску так, чтобы любые два из них били друг друга?

Ответ: 4.

Решение. Предположим, что на доску поставлено несколько попарно бьющих друг друга ферзей. Рассмотрим самую левую из тех вертикалей, на которых есть ферзи, и самого нижнего на этой вертикали ферзя обозначим через Ф. Тогда любой другой ферзь может располагаться только на одном из следующих четырёх направлений от Ф: вверх, вправо вверх, вправо, вправо вниз. На каждом из этих направлений стоит не более одного ферзя, причём, если есть ферзь на направлении вверх, то нет ферзя на направлении вправо вниз. Следовательно, кроме Ф, на доске стоит не более трёх ферзей.

С другой стороны, легко найти позицию с четырьмя попарно бьющими друг друга ферзями; такова, например, позиция с ферзями, заполняющими квадрат размером 2x2 клетки.

200. Для какого наибольшего числа k верно утверждение: любые k клеток шахматной доски можно побить, поставив ферзя на одну из остальных клеток?

Ответ: 2.

Решение. Очевидно, что любые две клетки побить можно. С другой стороны, клетки a1, d2 и h7 не могут быть биты все одним ферзём.

300. Каким наименьшим числом ферзей можно побить все белые клетки доски?

Ответ: 2.

Указание. Пусть, как и на обычной доске, клетка a1 - чёрная. Тогда ферзи, поставленные на клетки c4 и f1, побьют все белые клетки.

400. Третья горизонталь шахматной доски заполнена белыми ферзями, а пятая - чёрными. За какое наименьшее число ходов можно перевести всех белых ферзей на пятую горизонталь, а всех чёрных - на третью?

Ответ: 18.

Решение. Рассмотрим ферзей, занимающих первоначально клетки a3, c3, e3, g3, a5, c5, e5 и g5. Ферзь, который первым из них сделает свой ход, не сможет этим ходом сразу же попасть на своё окончательное место (поскольку на другой горизонтали все места, куда можно было бы попасть одним ходом, пока будут заняты). Аналогичное утверждение верно и для того ферзя, который первым из ферзей, стоящих первоначально на клетках b3, d3, f3, h3, b5, d5, f5 и h5. Наберётся, таким образом, по меньшей мере два хода ферзями на их неокончательные места. А поскольку ходов на окончательные места ровно 16 (столько же, сколько и ферзей), то общее число ходов окажется больше или равным 18.

Покажем, что 18 ходов для осуществления требуемых перемещений достаточно. Сделать можно такие (записанные шахматной нотацией) ходы: 1) Qa3-a4, 2) Qc5-a3, 3) Qe3-c5, 4) Qg5-e3, 5) Qg3-g5, 6) Qe5-g3, 7) Qc3-e5, 8) Qa5-c3, 9) Qa4-a5, 10) Qb3-b4, 11) Qd5-b3, 12) Qf3-d5, 13) Qh5-f3, 14) Qh3-h5, 15) Qf5-h3, 16) Qd3-f5, 17) Qb5-d3, 18) Qb4-b5.