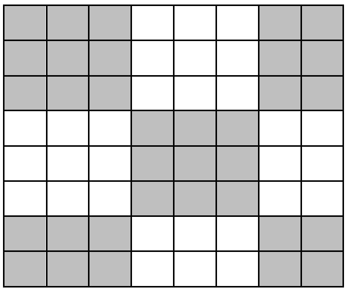
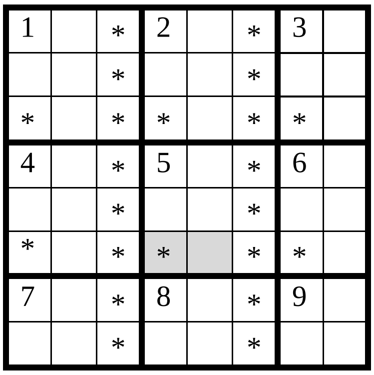
Разбор задач 2 тура 9 математической онлайн-игры
Тема «Фишки на шахматной доске»

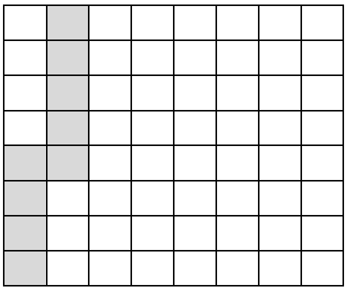


100. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску, чтобы от любой фишки до любой другой шахматный король не мог дойти за два хода?
Ответ: 9.
Решение. Разобьём доску на 9 частей, как показано на рисунке. В каждой части не может стоять более одной фишки. 9 могут стоять, например в левых верхних угловых клетках каждой части.

200. На некоторых клетках шахматной доски стоят фишки, а некоторые клетки свободны. Оказалось, что в любом квадрате 3х3 стоит ровно по 4 фишки. Какое наименьшее число фишек может стоять на доске?



Ответ: 22. Пример на рисунке.
Решение. Разобьём доску на 9 частей, как в предыдущей задаче, и занумеруем части от 1 до 9 справа налево сверху вниз. В каждом из полных квадратов 3х3 должно быть по 4 фишки. В прямоугольниках 3 и 6, 7, 8 – хотя бы по одной.
Если в 6 и 8 – только по одной фишке, то в трёх клетках слева от 6 и в трёх клетках сверху от 8 должны стоять по 3 фишки, и при этом в 5 оказывается 5 фишек. Итак, пусть в прямоугольнике 8 две фишки, и больше фишек нет. Т.к. в 9 всего 4 фишки, а в 6 – не более одной из них, в 8 – не более двух, в 5 – одна, то эти четыре фишки стоят именно так, как на рисунке. В закрашенной области над 8 при этом – только одна фишка. Но, тогда, в 7 должно быть две фишки. Итак, фишек уже 22.

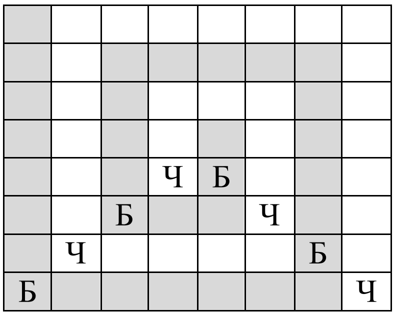


300. На первой горизонтали (в нижнем ряду) шахматной доски стоят белые фишки, а на восьмой горизонтали (в верхнем ряду) – чёрные фишки. За один ход можно одну из фишек передвинуть в любую свободную клетку, находящуюся слева, справа, сверху или снизу. За какое наименьшее количество ходов белые и чёрные фишки можно поменять местами?

Ответ: 120. Одна из фишек каждой вертикали должна уступить проход, иначе противоположные фишки не разойдутся. Итак, 8 горизонтальных ходов должно быть сделано. Остальные 16х7=112 ходов по вертикали должны быть сделаны, чтобы все фишки добрались до противоположного края доски.

Схема движения, при которой каждая фишка делает ровно 8 ходов, изображена на рисунке. Указан маршрут левой нижней фишки. Вторая нижняя фишка делает «зигзаг» в другую сторону и занимает верхнее левое положение. Остальные фишки, разбившись на пары, делают аналогичные манёвры.

400. На шахматной доске стоят 4 белые и 4 чёрные фишки, как показано на рисунке. Разрежьте доску на мин. число одинаковых частей, чтобы на каждой части стояли ладьи одного цвета.
Ответ: на 2 части. Разрезание на рисунке. Есть и другие варианты.



Тема «Переправы»

100. К реке подошли два солдата. У берега они увидели одноместную лодку. Воспользовавшись ею, они оба переправились через реку. Как такое смогло произойти?
Ответ: они подошли с разных сторон.

200. Волшебник Гэндальф в компании с хоббитом, орком и гоблином подошли к переправе через ущелье. Над ущельем протянута верёвка, к которой подвешена кабинка, вмещающая только двоих. Управлять кабинкой может только волшебник. Из-за взаимной вражды без присмотра нельзя оставлять одних орка с хоббитом, а также орка с гоблином. Как всем переправиться через ущелье?
Это известная задача о волке, козе и капусте, где Гэндальф – крестьянин, хоббит – капуста, орк – коза, гоблин - волк.

300. Дон Кихот на коне Росинанте, Санчо Панса на осле и Ходжа Насреддин на верблюде подъехали к реке. Там они увидели плот, на котором могут поместиться только двое. Животные боятся всех людей, в отсутствии своих хозяев. Как всем перебраться на другой берег?
Это задача о трёх рыцарях и их оруженосцах.

400. На рок-концерт пришли 6 спортсменов, у которых только один пригласительный билет на двоих. Они решают сделать так: двое проходят через контроль, один из прошедших возвращается и выносит пригласительный билет, потом ещё двое и т.д. Спортсмены имеют разную скорость: бегун может пройти через контроль за 3 минуты, прыгун – за 5, волейболист – за 6, пловец – за 7, боксёр – за 8, штангист – за 9 (в обратную сторону – скорости такие же). За какое наименьшее время все смогут пройти в зал?

Ответ: 46. Алгоритм: 3+5, 3, 8+9, 5, 3+5, 3, 3+6, 3, 3+7. Каждый нечётный проход – туда, чётный – обратно.
Оптимальность можно доказать перебором. Сокращает перебор такое соображение. Либо самый быстрый (бегун) переводит всех, либо самых медленных надо сводить вместе, чтобы терять время на их проход только один, а не два раза.

Тема «Деление с остатком»

100. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи числа 7/13.
Ответ: 4.
Решение. Имеем равенство 7/13 = 0,53846153846153... , где группа из 6 цифр (период дроби) повторяется бесконечно много раз. Так как остаток числа 1000000 от деления на 6 равен 4, то на миллионном месте после запятой стоит четвёртая цифра этого периода.
200. Числа 2000 и 2017 поделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 494, во втором - 9. На какое число делили?
Ответ: 502.
Решение. Искомое число является общим делителем чисел 2000 - 494 = 1506 и 2017 - 9 = 2008, следовательно, оно принадлежит множеству { 1, 2, 251, 502 }. А в этом множестве только число 502 больше каждого из остатков.

300. В некотором учебном году тринадцатые числа месяцев были пятницами чаще, чем любым другим днём недели. Каким днём недели было 13 октября?
Ответ: воскресеньем.
Решение. Месяцы будем называть дружественными друг другу, если их тринадцатые числа приходятся на один и тот же день недели.

Допустим сначала, что февраль в рассматриваемом учебном году состоял из 28 дней. Тогда сентябрю был дружествен только декабрь, октябрю - апрель, февралю - март, а ноябрь, январь и май дружественных не имели. Это значит, что 13-е было пятницей не более двух раз, и, если пятницей было два раза, то имелись и другие дни недели с таким свойством. Следовательно, описанная в условии задачи ситуация была бы невозможна.

А если в феврале было 29 дней, то дружественны друг другу были сентябрь, декабрь и март, причём никакая другая тройка месяцев таким свойством не обладала. Отсюда получаем, что 13 сентября было пятницей, а 13 октября - воскресеньем.
400. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 2017 и делится на все числа от 1 до 10.
Ответ: 20170080. Решение. Воспользуемся тем, что любое число из последовательности 20160, 201600, 2016000, ... делится на все числа от 1 до 10.

Пусть X - искомое число, а Y - число из указанной последовательности, причём Y состоит из такого количества цифр, что и X. Тогда разность X-Y также делится на все числа от 1 до 10; при этом первая цифра десятичной записи числа X-Y - единица. Вычислив НОК(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 2520, нетрудно установить, что наименьшим числом, кратным этому НОК и начинающимся с единицы, является 10080. Следовательно, Y оканчивается четырьмя нулями, откуда X = Y + 10080 = 20160000 + 10080 = 20170080.