Разбор задач 2 тура 8 математической онлайн-игры

Вдоль по Питерской

100. О т в е т: 2. У к а з а н и е. Задача решается перебором.

200. О т в е т (пример): для станций A, B, C и D, расположенных вдоль дороги в указанном порядке, положим AB=1, BC=3, CD=2 (отрезки AC, BD и AD будут иметь длины 4, 5 и 6 соответственно).

300. О т в е т: 14. Р е ш е н и е. Пусть кузнечик находится в начальной точке перед очередным, n-ым по счёту, прыжком. Очевидно, что тогда ни n-ым, ни (n+1)-ым прыжком он туда не вернётся. А (n+2)-ым может вернуться только в том случае, если одно из чисел n, n+1, n+2 равно сумме двух других. Последнее же возможно только при n=1.

Итак, попасть в начальную точку кузнечик может 3-им прыжком, а далее между каждыми двумя последовательными посещениями её должно делаться не менее чем по 4 прыжка. Значит, число посещений начальной точки не может превысить 1+(55-3)/4= 14. Нетрудно найти пример, когда оно равно 14; кузнечик в этом примере прыгает вправо в том и только в том случае, когда номер прыжка даёт остаток 1 или 2 от деления на 4.

400. О т в е т: 11. Р е ш е н и е. Будем считать, что участки, освещённые ровно 10 прожекторами, есть. В каждую из сторон тогда светит не более 10 прожекторов, а всего их установлено не более 10+10=20. Следовательно, дорога разбивается ими не более чем на 21 участок, а поскольку никакие два участка, освещённых 10 прожекторами, не могут быть соседними, то искомое число не превосходит 11. Пример, когда оно равно 11, очевиден (каждые два соседних прожектора светят в разные стороны).

Неравенство треугольника

100. О т в е т: 7, 8, 9, 10, 11, 12 или 13.

200. О т в е т: от 445 до 555 км. Р е ш е н и е. Рассмотрим на плоскости 4 точки – B (база), C (место приземления самолёта), D (место доставки десантников машиной) и E (конечная точка маршрута). Мы должны оценить длину отрезка BE.

Из рассмотрения треугольников BCE и CDE получим $BE < BC + CE < BC + (CD + DE) < 555$ (км). А для оценки минимально возможной длины BE воспользуемся тем, что любая сторона треугольника больше разности двух других: $BE > BD - DE > (BC - CD) - DE = 445$ (км).

300. О т в е т: 12. Р е ш е н и е. Пусть $a >= b >= c >= d >= e$ – длины отрезков. Так как $e = 1$, то $d >= 1$, и по неравенству треугольника получаем

$c >= d + e >= 2$. Записав также соотношения $b >= c + d >= 3$ и

$a >= b + c >= 5$, устанавливаем, что $a + b + c + d + e >= 5 + 3 + 2 + 1 + 1 = 12$.

400. О т в е т: 125. У к а з а н и е. Задачу можно решать через нахождение чисел X(1), X(2), ..., X(10), где X(m) - число треугольников, длина наибольшей стороны в которых равна m. Получив ряд 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, сложим эти 10 чисел.

Проценты, проценты ...

100. О т в е т: на 10%. Р е ш е н и е. Обозначим меньшее из исходных чисел через m. Так как 12,5% от m равно 0,125m, то среднее арифметическое равно m + 0,125m = 1,125m, а большее из двух исходных чисел – 1,125m + 0,125m = 1,25m. Поэтому искомое число процентов равно (0,125m / 1,25m) x 100 = 10.

200. О т в е т: 1/3. Р е ш е н и е. Пусть a – длина, b – ширина исходного прямоугольника. Тогда новый прямоугольник имеет длину 1,4a, ширину 1,2b и периметр 2(1,4a + 1,2b) = 2,8a + 2,4b. По условию задачи выполнено равенство 2,8a + 2,4b = 1,25(2a +2b), преобразующееся к виду 0,3a = 0,1b. Отсюда a/b = 1/3.

300. О т в е т: на 20%. Р е ш е н и е. Доля сухого вещества в угле сначала равна 96%, а впоследствии снижается до 80%. Поэтому 0,96m = 0,8m', где m – масса только что добытого угля, m' – его масса после впитывания воды. Отсюда m' = 1,2m, а в процентах такая прибавка равна

((m'-m)/m) x 100% = 20%.

400. О т в е т: на 300%. Р е ш е н и е. Если в секцию ходят M мальчиков и D девочек, то Колино число процентов равно ((M-D)/D) x 100, а Олино – ((M-D)/M) x 100. Из условия следует, что дробь (M-D)/D в 4 раза больше дроби (M-D)/M; значит, число M в 4 раза больше числа D, а Колино число равно ((4D-D)/D) x 100 = 300.