Разбор задач 4 тура математического интернет-турнира

24 октября 2018 года

Тема: НОД (наибольший общий делитель)

100. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.
Ответ: 98

Решение: разность должна делиться на 9, т.е. равняться 9. Вторая цифра не может быть меньше 8. Отсюда ответ.

200. Найдите НОД суммы всех трёхзначных чисел и суммы всех четырёхзначных чисел.
Ответ: 450

Решение: Сумма всех трёхзачных чисел равна $(100+999)\cdot 900/2=1099\cdot 450$. Сумма всех четырёхзачных чисел равна $(1000+9999)\cdot 4500$. Числа 1099 и 109990 взаимно просты, значит, НОД=450.

300. Чему равен НОД всех 10-значных чисел, в записи которых все цифры разные?
Ответ: 9

Решение: Каждое из чисел делится на 9. Разность $1023456798-1023456789=9$ должна делиться на НОД.

400. Найдите наибольшее возможное значение НОД двух различных 10-значных чисел, в записи каждого из которых все цифры различны.
Ответ: 4938271605

Такой НОД у этого числа и удвоенного числа: 9876543210. Большего значения быть не может, т.к. последнее число больше первого, по крайней мере, в 2 раза, а НОД не больше первого числа.

Тема: Хоккейная арифметика

100. В ходе игры каждый защитник применил в среднем 8 силовых приёмов, а каждый нападающий - 4. Против же каждого защитника применили в среднем 3, а против каждого нападающего - 7 силовых приёмов. Определите отношение числа защитников к числу нападающих.
Ответ: 3:5

Решение: Если было m защитников и n нападающих, то все вместе провели $8m + 4n$ приёмов; это же число равно $3m + 7n$. Равенство $8m + 4n = 3m + 7n$ преобразуется к виду $5m = 3n$, откуда $m:n = 3:5$

200. Штрафное время в матче распределилось между командами поровну, причём число 2-минутных штрафов у каждой команды совпало с числом 5-минутных штрафов у её соперников. Зная, что были и 10-минутные штрафы, но только у одной из команд, определите наименьшее возможное их количество.
Ответ: 3

Решение: Пусть одна из команд получила m 2-минутных, n 5-минутных и p 10-минутных штрафов, а другая - n 2-минутных и m 5-минутных. Тогда выполняется равенство $2m + 5n + 10p = 2n + 5m$, преобразующееся к виду $10p = 3(m-n)$. Отсюда видно, что p кратно 3; значит, оно не меньше 3. Все условия задачи выполняются, например, для $m=15$, $n=5$, $p=3$

Разбор задач 4 тура математического интернет-турнира

24 октября 2018 года

300. Каким наименьшим в розыгрыше Кубка Гагарина может оказаться число команд, выигравших больше половины своих матчей? (Кубок разыгрывается по системе плей-офф среди 16 команд; на каждом этапе играются матчевые серии до 4 побед.)
Ответ: 1

Пример: Если в 1/8 и 1/4 финала все серии закончатся со счетом 4:3, обе полуфинальные серии - со счётом 4:2, а финальная - со счётом 4:0, то победитель Кубка окажется единственной командой, выигравшей больше половины своих матчей.

400. В однокруговом турнире больше всех очков набрала команда, проигравшая больше всех матчей. Каким наименьшим могло быть число команд-участниц этого турнира? (За любую победу начисляется 2 очка, за поражение в овертайме или по буллитам - 1, за поражение в основное время матча - 0.)
О т в е т: 8

У к а з а н и е: Пусть участвовало 8 команд, одна из которых набрала 9 очков, проиграв 5 овертаймов и выиграв два других матча. Тогда, если остальные 7 команд в играх между собой одержали по 3 победы (и потерпели по 3 поражения) в основное время матчей, то каждая из этих 7 команд проиграла в турнире не больше 4 матчей и набрала не больше 8 очков.
Если же участвовало 7 команд, то команда, проигравшая больше всех матчей, проиграла их не меньше 4. Максимально возможное число набранных очков для такой команды - 2*2 + 4 = 8. При этом найдётся и команда, имеющая не меньше 4 побед, а значит - не меньше тех же 8 очков.

Тема: «Кони на досках»

100. Какое наибольшее количество ходов может сделать по доске 4×4 конь, если ему нельзя становиться на клетки дважды?
Ответ: 14.

Пример приведён на схеме. Перебор показывает, что пути, проходящего по всем клеткам, нет. Перебор ускоряют следующее соображение: если бы такой путь был, то он начинался и заканчивался бы в соседних угловых клетках.

10	13	8	3
5	2	11	14
12	9	4	7
1	6	15	

200. Сколькими способами на доску 4×4 можно поставить 8 коней, чтобы каждый конь бил ровно двух других коней?
Ответ: 6.

Решение. По известному факту (лемма о хороводах) кони должны стоять по циклам. Все циклы чётны, т.к. чёрные и белые клетки в них чередуются. Циклов длины 8 на доске четыре. С точностью до поворотов они представлены на левом рисунке. Находятся перебором. Кроме, того, есть циклы длины 4.

Их попарное использование даёт ещё два решения. Они представлены на правых рисунках. Другие циклы 8 коней образовывать не могут.

	К		
	К	К	
К		К	К
К	К		

К			К
	К	К	
	К	К	
К			К

	К	К	
К			К
К			К
	К	К	

300. Сколькими способами из шахматной доски 5×5 можно вырезать одну клетку, чтобы все оставшиеся клетки нельзя было обойти конём за 23 хода?
Ответ: 12

Решение: Чёрных клеток на доске на 1 больше, чем белых, а путь коня чередует цвет клеток, поэтому белые клетки подходят. При вырезании любой чёрной клетки нужный путь остаётся. В этом нетрудно убедиться перебором.

400. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить 31 коня, никакие два из которых не бьют друг друга?
Ответ: 68.

64 варианта даёт расположение коней на клетках того же цвета, что и вырезанная клетка. Ещё 4 варианта даёт расположение, изображённое на рисунке, и все его повороты.

К	К		К		К		К
К				К		К	
			К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	