

Разбор задач 3 тура математического интернет-турнира

18 октября 2018 года

Тема «Палиндромы»

100. Палиндром – это число (или слово), которое одинаково читается слева направо и справа налево. Какая наименьшая разность может быть у двух 5-значных палиндромов?

Ответ: 11

Пример: 49994 и 50005. Оценка: если к меньшему палиндрому добавить число, меньшее 11, то изменение первой и последней цифры одновременно не произойдёт.

200. Палиндром – это число (или слово), которое одинаково читается слева направо и справа налево. Найдите наименьший палиндром, делящийся на все нечётные цифры.

Ответ: 53235

Решение: деление на 5 означает, что последняя цифра (а, значит, и первая) – 5. Деление на 9 – сумма цифр делится на 9, т.е., по крайней мере, 18. Перебор наименьших таких палиндромов (585, 50805, 51615, 52425, 53235) даёт ответ.

300. Палиндром – это число (или слово), которое одинаково читается слева направо и справа налево. Представьте число 2018 в виде суммы наименьшего числа палиндромов.

Ответ: 1221+797

400. Палиндром – это число (или слово), которое одинаково читается слева направо и справа налево. Сколько разных натуральных чисел можно получить при сложении двух трёхзначных палиндромов?

Ответ: 323.

Решение: $aba + cdc = 101(a+c) + 10(b+d)$. Первая скобка может принимать 17 различных значений (от 2 до 18), т.е. первого слагаемого может принимать 17 различных значений: от 202 до 1818. Второе слагаемое может принимать любое из 19 значений, кратных 10, от 0 до 180.

Остаётся проверить, когда при разных значениях скобок могут получиться одинаковые суммы. Пусть эти значения в первом случае x и y , а во втором z и t .

$101x + 10y = 101z + 10t$. Отсюда, $101(x-z) = 10(t-y)$. Правая часть делится на 10, значит, $x-y$ равно 0 или 10. Если 0, то и правая часть – ноль.

Если 10 (12-2, 13-3, 14-4, 15-5, 16-6, 17-7, 18-8), то сократим на 10 и получим, что $101=t-y$, чего не может быть.

Итак, всего искомым сумм $17 \cdot 19 = 323$.

Город Трулис

Дело происходило в городе Трулис, где каждый житель либо приезжий, всегда говорящий правду, либо местный, никогда не говорящий правду. В справочном бюро Трулиса работают два сотрудника, один местный и один приезжий. На все вопросы они отвечают оба.

В каждой задаче необходимо указать все ответы.

Разбор задач 3 тура математического интернет-турнира

18 октября 2018 года

100. Дело происходило в городе Трулис, где каждый житель либо приезжий, всегда говорящий правду, либо местный, никогда не говорящий правду. В справочном бюро Трулиса работают два сотрудника, один местный и один приезжий. На все вопросы они отвечают оба.

Путешественник встретил жителя Трулиса около справочного бюро. «Ты кто, местный или приезжий?» – спросил он жителя. Тот ответил, но путешественник не расслышал ответа. Тогда он спросил у работников справочного бюро, что сказал первый.

Первый работник: «Он сказал, что местный»

Второй работник: «Он сказал, что приезжий»

О каких из трёх горожан (житель и два работника справочного бюро) путешественник может точно сказать, местные они или приезжие?

В задаче необходимо указать все ответы.

Ответ. Житель – неизвестно кто. Первый работник – местный, второй – приезжий.

Решение. Независимо от того, кто он, житель ответит, что он говорит правду, т.е., что он приезжий. Соответственно, первый работник солгал, т.е. он местный, а второй сказал правду, т.е. он приезжий.

200. Дело происходило в городе Трулис, где каждый житель либо приезжий, всегда говорящий правду, либо местный, никогда не говорящий правду. В справочном бюро Трулиса работают два сотрудника, один местный и один приезжий. На все вопросы они отвечают оба.

Путешественник хочет найти своих друзей: Адамса, Боба, Вилли и Гарри, которые живут в Трулисе, на одной улице, в домах 1, 2, 3 и 4. На три вопроса, в каком доме кто живёт, в справочном бюро были даны такие пары ответов.

I. Адамс – во втором. Боб – в четвёртом.

II. Вилли – в третьем. Гарри – в первом.

III. Гарри – в первом. Боб – в третьем.

Где кто живёт на самом деле?

В задаче необходимо указать все ответы.

Ответ: Адамс – в 3, Боб – в 4, Вилли – в 2, Гарри – в 1

Решение. Решение находится несложным перебором.

300. Дело происходило в городе Трулис, где каждый житель либо приезжий, всегда говорящий правду, либо местный, никогда не говорящий правду.

Путешественник встретил 100 жителей Трулиса. На вопрос, на сколько приезжих среди них меньше чем местных они ответили:

- Не меньше чем на одного.

- Не меньше чем на двух.

- Не меньше чем на трёх.

...

- Не меньше чем на сто.

Если путешественник правильно расслышал все ответы, то сколько же местных жителей среди этих ста? Укажите все возможности.

Ответ: такого быть не может

Решение. Если приезжих 33 или меньше, то местных 67 или больше, т.е. разность не меньше 34. Это значит, что правду сказали не меньше 34 человек. Противоречие. Если же приезжих 34 или больше, то местных 66 или меньше, т.е. разность не больше 32.

Разбор задач 3 тура математического интернет-турнира

18 октября 2018 года

Противоречие. Итак, такого быть не может, т.е. путешественник неправильно зафиксировал ответы.

400. Дело происходило в городе Трулис, где каждый житель либо приезжий, всегда говорящий правду, либо местный, никогда не говорящий правду.

Путешественник встретил десять жителей Трулиса, некоторые из которых знакомы друг с другом, а некоторые нет. Каждый, указав на каждого из этой группы, сказал одну из следующих фраз:

- это мой знакомый местный житель;
- это мой знакомый приезжий;
- я его не знаю.

Оказалось, что фразы сказанные друг другу, ни разу не совпали. Про какое наибольшее число аборигенов путешественник сможет гарантированно узнать, кто они?

Ответ: 8

Домино: цепи и кольца

100. Укажите какие-нибудь 6 костей, любые 5 из которых можно выложить в цепь, а все 6 - нельзя.

Пример: кости (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

Указание. У цепи всего два конца, поэтому найдутся числа, которых на её концах нет.

Пусть, скажем, на концах цепи нет единиц. Тогда какая-то из костей (1,2), (1,3) или (1,4) в цепь не входит, поскольку количество единиц внутри цепи обязательно чётно.

200. Имеется N костей, никакие $N-1$ из которых выложить в кольцо нельзя, а все N - можно. Найдите наибольшее возможное N .

Ответ: 21

Решение. Заметим, что среди этих N костей нет дублей, а все недубли (в количестве $28-7=21$) в кольцо выкладываются. С другой стороны, 20 недублей при отсутствии, скажем, кости (3,5), образовать кольцо не смогут, поскольку в любом кольце количество троек (как и любого другого числа очков) чётно. (Из рассматриваемых 20 костей тройки имеют ровно пять: (0,3), (1,3), (2,3), (3,4), (3,6).)

300. Весом кости назовём сумму очков на её половинках. Какое наибольшее число костей, среди весов которых нет одинаковых, можно выложить в кольцо?

Ответ: 13

Решение. Кости (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,5), (5,6), (6,6), (6,0), выложенные в указанном порядке, образуют кольцо, где каждый из 13 возможных весов представлен ровно одной костью.

400. Дискриминантом кости назовём неотрицательную разность чисел очков на её половинках. (Например, дискриминант кости (3,5) равен 2, а дискриминант любого дубля – 0.) Какое наибольшее число костей, среди дискриминантов которых нет одинаковых, можно выложить в кольцо?

Ответ: 6

Разбор задач 3 тура математического интернет-турнира

18 октября 2018 года

Решение. Кольцо из 7 костей, где были бы представлены все возможные дискриминанты (от 0 до 6) выложить не удастся. В самом деле: 1) каждое число в кольце встречается чётное число раз, 2) (следует из 1)) сумма весов всех костей в кольце чётна, 3) для любой кости чётность дискриминанта совпадает с чётностью веса, 4) (следует из 2) и 3)) сумма дискриминантов всех костей в кольце чётна, 5) сумма $0+1+2+3+4+5+6$ нечётна. Сделанное выше утверждение следует из 4) и 5). С другой стороны, нетрудно построить кольцо из 6 костей (например, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,5)$, $(5,1)$, $(1,6)$, $(6,0)$) с попарно неравными дискриминантами.