Разбор задач 2 тура математического интернет-турнира

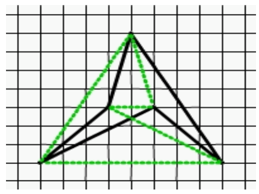
10 октября 2018 года

Тема «Гвоздики – ниточки – паучки»

100. В доску вбиты 9 гвоздиков – в вершинах квадрата, в серединах рёбер и в центре. Сколькими способами паучок может проложить паутинку, обходящую все гвоздики по одному разу, возвращающуюся к исходному гвоздику и имеющую наименьшую длину?
Ответ: 8. Из центра паутинка должна идти к двум соседним по контуру гвоздикам.

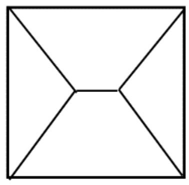
200. В середину каждой клетки доски 4x4 вбито по гвоздику. Паучок хочет отгородить себе квадратный участок с вершинами в гвоздиках. Сколькими способами он сможет это сделать?
Ответ: 20.

300. В доску вбили *n* гвоздиков. На двух из них поселились паучки. Оказалось, что каждый паучок смог протянуть паутинку так, чтобы по ней можно было проползти, посетив каждый гвоздик по одному разу и вернуться в свой домик. При этом, все участки паутинок – отрезки, и никакие два отрезка не имеют общих точек, кроме концов. При каком наименьшем *n* это возможно? По чужим паутинкам паучки принципиально не ползают.



Ответ: 5.
Указание: На рисунке паутинки пауков разного цвета. При меньших *n* не хватит разных участков для паутинок.

400. В вершинах квадрата 40x40 вбиты 4 гвоздика. Разрешается вбить (а можно и не вбивать) ещё несколько гвоздиков и натянуть между некоторыми из них ниточки, чтобы паучок смог от любого гвоздика доползти до любого другого по ниточкам. Может ли общая длина ниточек оказаться меньше 113? Если да, то укажите, как это сделать.
Ответ: да.
Указание: См. рис.
Средний отрезок длины 10. Четыре косых отрезка длины 25 каждый.



Тема «Квадраты»

Квадраты

100. Какое наибольшее число квадратов можно начертить на плоскости так, чтобы каждые два квадрата имели ровно две общие вершины?
Ответ: 3

Указание. Перебор показывает, что четыре квадрата поставленным условиям удовлетворять не могут. Но можно, начертив два равных квадрата с общей стороной, начертить третий, для которого общая сторона первых двух служит диагональю.

200. У Пети было 10 палочек длинами 1, 2, 3, …, 10 соответственно. Одну из них он выкинул, а из 9 остальных выложил контур квадрата. Укажите все возможные значения периметра этого квадрата.
Ответ: 48 и 52

Решение. Периметр мог быть только целым числом, кратным 4 и лежащим между $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ и $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$. Таких чисел два - 48 и 52. Равенства 10+2

= 9+3 = 8+4 = 6+5+1 = 12 = 48/4 и 10+2+1 = 9+4 = 8+5 = 7+6 = 13 = 52/4 показывают, что квадраты периметрами 48 и 52 получиться могли.

300. Квадрат размером 20х20 разбили на одинаковые квадратики, сумма периметров которых равна 2000. Найдите число квадратиков.
Ответ: 625

Решение. Разбиение на одинаковые квадратики получается проведением в квадрате горизонтальных и вертикальных отрезков длины 20. Так как к каждому такому отрезку квадратики примыкают с обеих его сторон, то его вклад в сумму периметров равен 40. А поскольку сумма периметров больше периметра исходного квадрата на 2000 - 80 = 1920, то число проведённых отрезков равно 1920 : 40 = 48. Это значит, что проведено 24 горизонтальных и 24 вертикальных отрезка, разбивающих каждую из сторон квадрата на 25 равных частей. Получено, следовательно, 25х25 = 625 квадратиков.

400. Каким может быть размер квадрата, сложенного из 100 квадратов, ровно 99 из которых имеют размер 1х1?
Ответ: 50х50 или 18х18.

Решение. Пусть m x m - искомый размер, а n x n - размер сотого квадрата. Тогда имеем равенства m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) = 99. Разложить число 99 на два множителя (первый из которых меньше второго) можно только тремя способами: 1х99, 3х33, 9х11. В первом случае получается m-n = 1, m+n = 99, откуда m = 50, n = 49, во втором - m-n = 3, m+n = 33, откуда m = 18, n = 15, в третьем - m-n = 9, m+n = 11, откуда m = 10, n = 1. Последний случай не подходит, так как по условию размер сотого квадрата отличен от 1х1.

Тема «Числа болтливые и сдержанные»

100. Число назовём болтливым, если каждая его цифра совпадает с количеством цифр, равных ей, среди всех остальных цифр этого числа. Например, число 21221 – болтливое. Сколько цифр в самом большом болтливом числе?
Ответ: 55.

Решение. Заметим, что нуль в болтливом числе может быть только один, единиц - две , двоек – три, …, девяток – десять. Следовательно, общее количество цифр не может превышать 1+2+3+ … +10 =55. -

200. Число назовём болтливым, если каждая его цифра совпадает с количеством цифр, равных ей, среди всех остальных цифр этого числа. Например, число 21221 – болтливое. Укажите наименьшее из 20-значных болтливых чисел.
Ответ: 10122244444888888888.
Указание. Задача решается подбором с использованием соображений, высказанных в решении предыдущей задачи.

Разбор задач 2 тура математического интернет-турнира

10 октября 2018 года

300. Число назовём сдержанным, если каждая его цифра совпадает с количеством цифр, не равных ей, среди всех остальных цифр в записи этого числа. Например, число 211 - сдержанное. Сколько цифр в самом большом сдержанном числе?

Ответ: 17.

Решение. Если в записи сдержанного числа ровно k девяток, то оно (k+9)-значное, причём любая его цифра, отличная от девятки, больше либо равна k. Значит, k не превосходит 8, а количество цифр в сдержанном числе не превосходит 8+9=17. Пример 17-значного сдержанного числа: 99999999888888888.

400. Число назовём сдержанным, если каждая его цифра совпадает с количеством цифр, не равных ей, среди всех остальных цифр в записи этого числа. Например, число 211 - сдержанное. Каким наибольшим может быть количество различных цифр в сдержанном числе?

Ответ: 4.

Решение. Пусть C – некоторая цифра в сдержанном числе. Все другие различные цифры встречаются в нём разное число раз, а общее количество цифр, отличных от C, не превышает 9, и, в частности, меньше, чем 1+2+3+4. Поэтому различных цифр, отличных от C, не может быть более трёх, а всего различных цифр в сдержанном числе не может быть более четырёх. С другой стороны, бывают сдержанные числа с четырьмя различными цифрами, например, 9887776666.