Разбор задач финала 10 математической онлайн-игры
Тема «Большой футбол»

100. Найдите хотя бы одно решение ребуса МЯЧ + ПАС + ГОЛ = 2018, где разными буквами зашифрованы разные цифры.

Пример: 2018 = 965 + 843 + 210. **Указание.** Задача решается подбором, но прежде, чем приступать к нему, целесообразно определить ту единственную цифру Х, которая не встречается ни в одном из чисел МЯЧ, ПАС и ГОЛ. Поскольку М+Я+Ч+П+А+С+Г+О+Л+Х = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 делится на 9, а сумма М+Я+Ч+П+А+С+Г+О+Л (как и сумма МЯЧ+ПАС+ГОЛ, равная 2018) даёт остаток 2 от деления на 9, то Х – семёрка.

200. На одном из чемпионатов итоговые результаты в одной из подгрупп получились такими: СССР - 5 очков, мячи 9:1; Франция – 5 очков, мячи 5:1; Венгрия – 2 очка, мячи 2:9; Канада – 0 очков, мячи 0:5. (Каждая из команд сыграла по одному матчу с каждой из остальных. За выигрыш матча начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.) Определите счёт матча СССР – Венгрия.

Ответ: 1:1. **Указание.** Легко видеть, что СССР и Франция обыграли две другие команды, а между собой сыграли вничью. За весь турнир СССР и Франция пропустили всего по 1 голу, значит, ничья была со счётом 0:0 или 1:1. Счёт 0:0 означал бы, что голы, пропущенные этими сборными, пропущены ими от Венгрии; но Венгрия, забив за весь турнир всего 2 гола, по меньшей мере один из них забила обыгранной ею Канаде. Это противоречие означает, что искомый счёт – 1:1.

300. В финальных матчах чемпионатов мира участвовали сборные только из Европы и из Южной Америки, причём европейцы имеют в них на 2 победы больше и на 6 поражений больше. Кто и на сколько больше выиграл финальных матчей с межконтинентальным составом участников?

Ответ: южноамериканцы, на 2 матча. **Решение.** Пусть Европа выиграла p, а Южная Америка – q "смешанных" финалов. Если, кроме того, было m "чисто европейских" и n "чисто южноамериканских" финалов, то всего у Европы $m+p$ побед и $m+q$ поражений, а у Южной Америки – $n+q$ побед и $n+p$ поражений. Из условий $m+p = n+q+2$ и $m+q = n+p+6$ находим, что $p–q = –2$.

400. Определите, сколькими способами могут распределиться первые три места на ЧМ-2018.(В чемпионате участвуют 32 сборные, разбитые на подгруппы A, B, C, D, E, F, G и H, по 4 команды в каждой. Система розыгрыша такова, что тройка призёров не может сформироваться только из представителей подгрупп A, B, C, D или же только из представителей подгрупп E, F, G, H; все другие тройки призёров в принципе возможны.)

Ответ: 3840. **Решение.** Из 32 команд упорядоченную тройку можно выбрать (32x31x30)/(3!) = 4960 способами, а из 16 команд – (16x15x14)/(3!) = 560 способами. Поэтому число возможных призовых троек команд равно 4960 – 2x560 = 3840.

Тема «Футбол в нашей школе»

100. В школьном футбольном турнире не было зафиксировано ни одной ничьи. Каждая команда выиграла столько же игр, сколько и все побеждённые этой командой соперники, вместе взятые. Определите наибольшее возможное число команд – участниц этого турнира.

Ответ: 4. **Указание.** Пусть какая-то команда выиграла у m других. Поскольку суммарное количество матчей, выигранных m командами, не меньше (m*(m–1))/2 – числа матчей, сыгранных ими между собой, то m больше или равно (m*(m–1))/2. Последнее же возможно, только если m не превосходит 3.

Для случаев m=3 и m=2 нетрудно установить, что в турнире участвовало ровно 4 команды. А если m=1, то число команд – 3.

200. В школьном чемпионате каждая команда сыграла с каждой одну игру. Все команды вместе набрали 100 очков. За победу давалось 3 очка, за ничью – одно, за поражение – 0. Сколько команд участвовало в этом чемпионате?

Ответ: 9 или 10. **Указание.** Так как по итогам каждого матча его участникам начисляется в сумме 2 или 3 очка, то число матчей в турнире заключено между 100/3 и 100/2. Этим условиям удовлетворяют только турниры 9 и 10 команд (36 и 45 матчей соответственно).

300. В школьном футбольном чемпионате каждая из 5 команд должна сыграть с каждой. При этом каждая команда должна играть не более одного матча в день и не более двух – в течение любых трёх дней. За какое наименьшее число дней можно провести весь чемпионат?

Ответ: 6. **Решение.** По принципу Дирихле найдётся команда, которая в первый соревновательный (для остальных) день играть не будет. В течение трёх следующих дней эта команда сыграет не более двух матчей, и ей останется играть не менее двух, на которые уйдёт не менее двух дней. Всего, таким образом, продолжительность турнира составит не менее 1+3+2 = 6 дней.

Обозначив команды буквами A, B, C, D и E, приведём пример расписания 6-дневного турнира для них. Пусть в 1-й день пройдут матчи A-B и C-D, во 2-й – B-C и D-E, в 3-й - A-E, в 4-й – B-D, в 5-й – A-C и B-E, в 6-й – A-D и C-E.

400. Футбольные команды 10, 9 и 6 классов провели между собой 10-круговой турнир (то есть каждые две команды сыграли друг с другом по 10 матчей). Десятиклассники больше, чем каждая из двух других команд, выиграли матчей, а девятиклассники меньше, чем каждая из двух других команд, проиграла матчей. Могли ли при этом наибольшее число очков набрать шестиклассники? (За выигрыш начисляется 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0.) Если да, то приведите пример, как это могло получиться.

Ответ: да. **Пример.** Пусть 6 кл. выиграл 6 матчей у 10 кл., 4 матча ему проиграл, а все матчи с 9 кл. закончил вничью. Тогда, если 10 и 9 кл. обыграют друг друга по 3 раза и сделают между собой 4 ничьи, то число побед у 10, 9 и 6 кл. будет равно 7, 3 и 6 соответственно, число поражений – 9, 3 и 4 соответственно, а число очков – 25, 23 и 28 соответственно.

Тема «Футбольные мячи»

100. Сильно надутый мяч весит 450 г, а слабо надутый – на 445 г. Несколько мячей весят всего 22 кг. Сколько среди них сильно надутых и сколько слабо надутых?

Решение. Заметим, что 10 слабо надутых мячей и 39 сильно надутых весят ровно 22 кг. Чтобы увеличить количество слабо надутых мячей хотя бы на 1, надо «сдуть» 89 сильно надутых (уменьшить их вес на 5 г каждого), а такого количества сильно надутых мячей нет. Аналогично, чтобы увеличить количество сильно надутых мячей, надо сдуть 90 слабо надутых, что тоже невозможно.

200. 9 футбольных мячей стоят больше 11000 рублей, но меньше 12000 рублей, а 13 мячей – больше 15000 рублей, но меньше 16000 рублей. Сколько стоит один мяч?

Решение. Заметим, что цена 1230 рублей за мяч удовлетворяет условиям задачи. Если мяч стоит меньше хотя бы на 1 рубль, то 9 мячей стоят меньше 11000 рублей, а если больше, то 13 мячей стоят дороже 16000 рублей.

300. Футбольный мяч сшит из нескольких лоскутков – белых шестиугольников и чёрных пятиконечных звёзд. Каждый шестиугольник граничит с тремя звёздами, а каждая звезда – с пятью шестиугольниками (примерно, как на картинке). Всего лоскутков больше 20, но меньше 30. Сколько из них звёзд и сколько шестиугольников?

Решение. Обозначим за x – количество шестиугольников, а за y – количество звёзд. Тогда, границ между лоскутками разными типа, с одной стороны, равно $3x$, а с другой стороны, $5y$. Итак, $3x=5y$. Отсюда, x делится на 5, т.е. $x=5k$. При этом, $y=3k$. Всего лоскутков $8k$. Единственное число, делящееся на 8, от 20 до 30 – это 24, откуда $k=3$, и звёзд, соответственно 9, а шестиугольников 15.

400. Два футболиста тренируются водить мяч. Они стартуют из одной точки и бегают по кругу по часовой стрелке. Один из них ведёт мяч. Когда один футболист обгоняет другого, мяч пасуется другому. Тренировка началась в

10:00, а закончилась в 11:00. Первый футболист делает круг за 2 минуты, а второй – за 3 минуты. Сколько кругов сделает мяч?

Решение. Предположим, что у каждого футболиста вначале есть свой мяч, а при обгонах футболисты меняются мячами. Тогда, мячи вместе сделают столько же кругов, что и футболисты, т.е. 50. Остаётся заметить, что мячи друг друга не обгоняют, т.е. сделают одинаковое количество кругов – по 25.