Семейная математическая онлайн-олимпиада «От А до Я»
финал, 29 апреля 2020 года
Ответы и указания к задачам

Вместе у телевизора

100. Телевизор у Ивановых принимает N каналов. На каждом из них10 минут в час приходится на рекламу. При каком наименьшем N гарантированно найдётся момент, когда реклама одновременно идёт по трём каналам?

Ответ: 13

Решение. Суммарное рекламное время всех N каналов в течение часа составляет 10*N минут. Это должно быть больше, чем 2*60 = 120 минут (суммарное рекламное время, которое было бы, если бы в любой момент реклама шла по двум каналам). Значит, искомое наименьшее значение N больше 12.

200. Некий сериал шёл несколько сезонов, в каждом из которых, начиная со второго, количество серий ровно на 20% отличалось от количества серий в предыдущем. Зная, что показывалось не более одной серии в день, определите наибольшее возможное число сезонов.

Ответ: 4

Решение. Изменение числа на 20% означает умножение его на 4/5 или на 6/5. Пусть в первом сезоне было N серий. Тогда N не превосходит 366, и указанное умножение могло произойти не более трёх раз. (Четыре умножения привели бы к числу N*(a/5)(b/5)(c/5)(d/5) = (abcdN)/(625), которое не является целым. Значит, сезонов было не более четырёх.

300. Каждый вечер все члены семьи собираются у телевизора, чтобы посмотреть очередную серию кинороману "Унесённые ураганом". В сериале всего 6 действующих лиц. В первой серии один из героев узнаёт, что на их родной штат надвигается ураган. В каждой новой серии происходит ровно одно из следующих событий:

А) кто-то, кто ранее этого не знал, узнаёт, что надвигается ураган;

Б) кто-то, кто уже знает о приближении урагана, узнаёт, что кто-то ещё узнал о событии А;

В) кто-то узнаёт, что кто-то узнал о событии Б.

Какое наибольшее количество вечеров семья может провести у телевизора, следя за увлекательными событиями сериала?

Ответ: 186

Решение. Пусть (P, Q) — произвольная упорядоченная пара действующих лиц. Тогда может произойти не более 6 событий, когда P узнаёт что-то про Q. А так как имеется ровно 6*5 = 30 упорядоченных пар лиц, то событий типов Б и В может набраться не более 30*6 = 180. И ещё будет не более 6 событий типа А.

400. Между 19.00 и 20.00 каждый из Ивановых безотрывно провёл у телевизора 15 минут, 3 из которых пришлись на рекламу. Каким наименьшим в течение всего этого часа могло быть рекламное время, если в каждый момент кто-то находился у телевизора?

Ответ: 9

Решение. Рассмотрим троих разных Ивановых: того, кто был у телевизора в 19.00, того, кто там был в 19.00, и того, кто там был в 20.00. Никакие двое из них не смотрели рекламу вместе, следовательно, на рекламу пришлось не менее 3+3+3 = 9 минут.

9 минут рекламного времени могли распределиться так: с 19.12 до 19.15, с 19.39 до 19.42 и с 19.57 до 20.00. Телевизор при этом могли посмотреть пятеро Ивановых: первый с 19.00 до 19.15, второй с 19.12 до 19.27, третий с 19.27 до 19.45, четвёртый с 19.39 до 19.54, пятый с 19.45 до 20.00.

Игра вслепую

100. Двоим участникам семейного шоу дают возможность поучаствовать в такой игре. Каждому на лбу пишут одно из чисел: 0 или 1. Числа могут быть и разными, и одинаковыми. Каждый участник видит только число на лбу своего напарника. Требуется угадать число, написанное на своём лбу, и написать его на бумажке. После этого бумажки открываются, и если кто-то угадал, то оба получают по 100 баллов. Как идущие на шоу могут договориться, чтобы наверняка выиграть? Никакой информацией обмениваться во время игры нельзя.

Ответ: Один пишет ту цифру, которую видит у второго, а другой – противоположную той, которую видит.

200. На столе лежат монеты. Всего 10 штук. Известно, что три монеты лежат орлом вверх, а семь – решкой. Участнику шоу завязывают глаза и подводят к столу. Он может трогать, двигать и переворачивать монеты, но не может на ощупь определить орлом или решкой вверх лежит монета. Ему надо разложить монеты в две части (не обязательно равные), чтобы количество орлов в каждой части было одинаковым. Как это сделать?

Ответ: Отложить три монеты во вторую группу и все их перевернуть.

300. На игровом столе лежат 10 карточек, повёрнутых надписями вниз. Известно, что на какой-то карточке, не лежащей с краю, написан нуль, по одну из сторон от этой карточки лежат карточки с написанными на них какими-то положительными числами, по другую — с какими-то отрицательными. За 100 баллов можно узнать произведение чисел на любых двух выбранных вами карточках. В любой момент можно остановить игру и указать на карточку с нулём. Если она указана верно, игрок получает 300 баллов. Как остаться в выигрыше? Какой может быть первая выбранная для этого пара карточек?

Ответ: Либо указать на карточки с номерами 3 и 7, либо 4 и 8.

400. Троим участникам семейного шоу дают возможность поучаствовать в такой игре. Каждому на лбу пишут одно из чисел: 0, 1 или 2. Числа могут быть и разными, и одинаковыми. Каждый участник видит только число на лбах своих друзей. Требуется угадать число, написанное на своём лбу, и написать его на бумажке. После этого бумажки открываются, и если кто-то угадал, то все получают по 300 баллов. Как идущие на шоу могут договориться, чтобы наверняка выиграть? Никакой информацией обмениваться во время игры нельзя.

Ответ: Каждый считает сумму двух чисел, которую видит. Один пишет число, дополняющее сумму до делящегося на 3 значения, другой – до значения, сравнимого с 1 по модулю 3, третий – сравнимого с 2 по модулю 3.

Домашняя геометрия. Решения

100. Если на втулку намотать 100 м марли, то получится рулон диаметром 0,5 м. А если намотать 200 м, то диаметр рулона составит 0,7 м. Найдите диаметр втулки.

Ответ: 0,1 м.

Решение. 100 м марли – рулон с площадью поперечного сечения $\pi \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2$ м^2 $= \frac{\pi}{16}$ м^2; для 200 м марли аналогичная площадь равна $\pi \cdot \left(\frac{0{,}7}{2}\right)^2$ м^2 $= \frac{49\pi}{400}$ м^2. Если d – диаметр втулки, то марля в этих сечениях заполняет площадь $\left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi d^2}{4}\right)$ м^2 и $\left(\frac{49\pi}{400} - \frac{\pi d^2}{4}\right)$ м^2 соответственно. При этом $\frac{49\pi}{400} - \frac{\pi d^2}{4} = 2\left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi d^2}{4}\right)$, откуда $d = 0{,}1$.

200. Требуется открутить гайку, имеющую в сечении форму квадрата со стороной 5 см. При каких целых значениях d это можно сделать гаечным ключом, отверстие которого имеет форму правильного шестиугольника со стороной d см ?

Ответ: 4.

Решение. Чтобы гайка помещалась в отверстие ключа, необходимо выполнение неравенства $5\sqrt{2} \le 2d$, где $5\sqrt{2}$ – диагональ сечения гайки, $2d$ – наибольшая диагональ правильного шестиугольника со стороной d. Гайка должна также “схватываться” ключом, т.е. должно выполняться неравенство $5\sqrt{2} > \sqrt{3}d$, где $\sqrt{3}d$ – расстояние между противоположными сторонами шестиугольника. Единственным целым числом d, для которого $\sqrt{3}d < 5\sqrt{2} \le 2d$, является 4.

Семейная математическая онлайн-олимпиада «От А до Я»
финал, 29 апреля 2020 года
Ответы и указания к задачам

300. Хозяйка печет лепёшки на круглой сковороде. Она кладёт три круглых куска теста так, чтобы каждый из них касался двух остальных и края сковороды. Определите диаметр сковороды, если диаметр одного из кусков равен 15 см, другого – 14 см, третьего – 6 см.

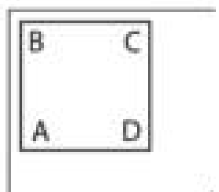
О т в е т : 35 см.

Р е ш е н и е . Центры лепёшек образуют треугольник со сторонами $\frac{15+14}{2}$, $\frac{15+6}{2}$ и $\frac{14+6}{2}$, являющийся (ввиду равенства $29^2 = 21^2 + 20^2$ и обратной теоремы Пифагора) прямоугольным. Дополним его до прямоугольника, обозначив четвертую вершину через O. Тогда O – центр сковороды, а искомый диаметр равен $2 \cdot \frac{15+14+6}{2} = 35$ (см).

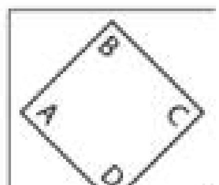
400. В углу кухни стоит квадратный (при взгляде сверху) холодильник, который можно поворачивать по полу на любой угол вокруг любой из его четырёх ножек, расположенных в вершинах квадрата. Какое наименьшее число поворотов нужно совершить, чтобы в итоге повернуть холодильник на 90 градусов, поставив на прежнее место? Считать, что между холодильником и стеной есть зазор в 1 см.

О т в е т : 3.

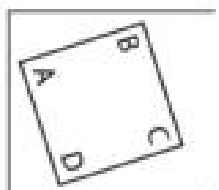
Р е ш е н и е . Пусть холодильник $ABCD$, ножка B которого находится в углу кухни (рис. *а*)), требуется поставить так, чтобы в углу оказалась вершина A. Двух поворотов для этого недостаточно, так как после первого поворота ни одна из вершин не сможет оказаться на своём окончательном месте.



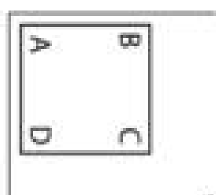
а)



б)



в)



г)

Укажем нужную последовательность из трёх поворотов: 1) поворот вокруг A, в результате которого вершина C удаляется от исходного положения на расстояние, равное стороне квадрата (рис. *б*)), 2) поворот вокруг C, в результате которого вершина B занимает своё окончательное место (рис. *в*)), 3) поворот вокруг B, в результате которого весь холодильник занимает окончательное положение (рис. *г*)).

Осуществимость первого и третьего поворотов очевидна, а для осуществимости второго поворота необходимо, чтобы вершина C на рис. б) была удалена от стены, ближайшей к A, на расстояние, большее диагонали квадрата. Другими словами, мы должны убедиться, что $dsin(\varphi + 45^0) + 1 > d$, где d – длина диагонали квадрата (в сантиметрах), φ – величина угла первого поворота. Но φ – угол при вершине равнобедренного треугольника со сторонами d, d и $\frac{d}{\sqrt{2}}$; при помощи теоремы косинусов находим $cos\varphi = \frac{3}{4}$, откуда

$sin(\varphi + 45^0) = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{14}}{8}$. Вышеприведенное неравенство, переписанное в виде $d < \frac{8}{8-\sqrt{18}-\sqrt{14}}$, для бытовых холодильников выполняется, поскольку $\sqrt{18} > 4{,}23$, $\sqrt{14} > 3{,}74$ и $\frac{8}{8-\sqrt{18}-\sqrt{14}} > \frac{800}{3}$.