**Разбор задач 3 тура 2 турнира 7 математической онлайн-игры**

**Тема «Земля»**

**100.** Меридиан – это кратчайшая линия, соединяющая полюса. Параллель – это окружность, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от Северного полюса. Сколько надо провести линий (параллелей и меридианов), чтобы поверхность Земли разделилась на 33 части? Укажите все возможности.

**Ответ:** 13, 32, 33 Решение основывается на переборе случаев – меридианов должно быть столько, чтобы количество областей ("долек" на поверхности Земли) было делителем числа 33, т.к. параллели, разрезают каждую дольку на равное количество частей. Таким образом, меридианов может быть: 0, 1, 3, 11, 33. Это даёт 32, 32, 10, 2 и 0 параллелей соответственно.

**200.** Сколько спутников надо запустить, чтобы каждая точка поверхности Земли наблюдалась хотя бы с одного спутника?

**Ответ:** 4. С одного спутника не наблюдается хотя бы один большой круг – "экватор". С двух – пересечение таких "экваторов", т.е. две противоположные точки. Для них нужны ещё 2 спутника. Четырёх спутников достаточно, например, в вершинах правильного тетраэдра (Земля при этом находится в центре этого тетраэдра).

**300.** Метеоролог вышел из точки А, прошёл 1 км на юг, затем 1 км на восток, затем 1 км на север и оказался в точке В. Есть ли на поверхности Земли хотя бы одно такое место, в котором расстояние от А до В больше 2 км? Если да, укажите его.

**Ответ:** да. Например, такое: от параллели длиной 2 км около Южного полюса отойти на 1 км на север.

**400.** Площадь поверхности Земли – 510 миллионов квадратных километров. Вода покрывает 360 миллионов квадратных километров. На 400 миллионах квадратных километрах хотя бы раз выпадал снег. На 450 миллионах квадратных километрах хотя бы раз бушевали грозы. Какая наименьшая возможная площадь поверхности воды, над которой выпадал снег, и сверкали молнии?

**Ответ:** 190. Решение. Не покрытыми водой остаются 150 миллионов кв. км. Без снега – 110, без гроз – 60. Всего, хотя бы без одного из этих факторов – не более 320.

**Тема «Теория цифр»**

**100.** Из 10 различных цифр составили 5 дробей (по одной цифре на каждый числитель и знаменатель). Какое наибольшее количество этих дробей могли оказаться целыми?

**Ответ:** 5. Например, 0/7, 5/1, 9/3, 8/4, 6/2.

**200.** Число A сколько бы раз ни умножить само на себя, оканчивается на одни и те же три цифры. Какие? Укажите все возможности. **Ответ:** 000, 001, 625, 376. Решение. Последняя цифра не меняется при умножении на себя, т.е. может быть: 0, 1, 5, 6. В первом случае куб (и более высокие степени) числа оканчиваются на три нуля. Во втором случае, если обозначить за x предпоследнюю цифру, умножая столбиком, получим, что предпоследняя цифра квадрата числа равна последней цифре числа 2x. Это возможно только при x=0. Аналогично – предпоследняя цифра. В третьем и четвёртом случаях подобные рассуждения дают значения предпоследней цифры – 2 и 7 соответственно, а третьей цифры – 6 и 3.

**300.** Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 18, но не делится на сумму своих цифр.

**Ответ:** 2898. Решение. Число делится на 18, значит, его последняя цифра чётная, а сумма его цифр делится на 9. Чтобы число не делилось на сумму цифр, эта сумма должна быть, по крайней мере, 27. Среди 3-значных (и менее) чётных чисел таких нет. Среди 4-значных есть число 2898.

**400.** Барон Мюнхгаузен утверждает, что какое бы 10-значное число, содержащее все цифры, ему ни дали, он сможет вычеркнуть из него N цифр, чтобы оставшиеся цифры шли либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. При каком наименьшем N барон может оказаться прав?

**Ответ:** N=6.

## Тема «Ищите то, что не меняется»

**100.** В лифте 1000-этажного небоскрёба есть только кнопки "+35" и "-14" (первая поднимает лифт на 35 этажей, вторая – опускает на 14). На какой самый высокий этаж можно подняться с первого?

**Ответ:** на 995-й. **Решение.** Заметим, что после любых перемещений лифт оказывается на этаже, номер которого при делении на 7 даёт остаток 1. Наибольший номер с таким свойством - 995. Попасть на 995-й этаж можно, например, так: 15 раз воспользоваться кнопкой "+35", затем 4 раза кнопкой "-14", после чего вновь 15 раз кнопкой "+35".

**200.** В четырёх угловых клетках таблицы 4x4 стоят плюсы, в остальных - минусы. Можно заменять все знаки любого столбца или строки на противоположные. Каким наибольшим можно сделать число плюсов в таблице?

**Ответ:** 12. **Указание.** Заметьте, что в каждом из четырёх квадратов 2x2, примыкающих к углам доски, число плюсов при указанных преобразованиях остаётся нечётным.

**300.** По 33 деревьям прямой аллеи летают 333 воробья. Каждую секунду каждый воробей перелетает с дерева на соседнее с ним справа или слева. Каким наибольшим может стать число деревьев, занятых воробьями, если первоначально все они сидели на одном дереве, а взлетели одновременно?

**Ответ:** 17. **Решение.** Пусть деревья пронумерованы от одного конца аллеи к другому числами 1, 2, 3, ..., 33. Тогда для каждого воробья каждую секунду меняется чётность дерева, на которое он садится. А так как вначале все воробьи были на одном дереве, то в дальнейшем чётность номеров занимаемых ими деревьев будет одинаковой для всех 333 воробьёв. Нечётные номера имеют 17 деревьев, чётные - 16; следовательно, в каждый отдельный момент времени занято будет не более 17 деревьев. Ясно также, что возможна ситуация, когда все 17 "нечётных" деревьев окажутся занятыми.

**400.** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 33. Можно любую пару чисел (x; y) заменять на число xy-x-y+2. Какое число останется после 32 таких операций? Если ответов несколько, укажите их все.

**Ответ:** 1. Указание. Заметьте, что если x=1 или y=1, то xy-x-y+2 = 1.