

Разбор задач 1 тура 1 турнира 7 математической онлайн-игры

Тема «Принцип Дирихле»

100. О т в е т: 733. У к а з а н и е. Это число на 1 больше удвоенного числа дней в високосном году.

200. О т в е т: 44. У к а з а н и е. Если ферзь не будет под боем других ферзей, то на доске будет иметься по меньшей мере 21 пустая клетка (этот минимум достигается, когда ферзь стоит в углу). А если ферзями занять любые 44 (или больше) из 64 клеток, то пустыми останутся 20 (или меньшее количество) клеток.

300. О т в е т: в апреле. Р е ш е н и е. Три месяца, о которых идёт речь, содержат в сумме меньше 90 дней. В самом деле, всякий 90-дневный промежуток состоит из 12 полных недель и ещё 6 дней ($90=12 \times 7 + 6$); значит, какие-то 6 из 7 существующих дней недели встретятся в таком промежутке по 13 раз, а один – 12 раз. Но из Петиного высказывания следует, что по 12 раз встретились суббота и воскресенье. Итак, в трёх месяцах вместе не больше 89 дней, что и позволяет нам однозначно их определить – февраль, март, апрель.

400. О т в е т: 25. Р е ш е н и е. Число учеников может быть равным 25, что показывает следующий пример распределения звонков. Расставим всех 25 по кругу лицом к центру, и пусть каждый примет звонки от тех 12, которые стоят по правую руку от него. Предположим теперь, что число учеников не превосходит 24. Из условий задачи легко будет вывести, что каждый сделал не более 11 звонков, которые были приняты. И получится, что суммарное (по всему классу) число звонков не более, чем в 11 раз больше числа учеников. Но, с другой стороны, поскольку каждым принято 12 звонков, суммарное число звонков в 12 раз больше числа учеников. Противоречие.

Тема «Палиндромы»

100. О т в е т (пример): $1441+575$.

200. О т в е т: 39993. Р е ш е н и е. Ясно, что искомый палиндром больше 999. А поскольку сумма цифр любого четырёхзначного палиндрома чётна, то в

искомом числе не меньше 5 разрядов. Сумма же цифр любого пятизначного палиндрома, начинающегося (а значит, и оканчивающегося) единицей или двойкой, меньше 33. Поэтому палиндром 39993 – искомый.

300. О т в е т: 1998. Р е ш е н и е. Любой шестизначный палиндром определяется своими тремя первыми цифрами, образующими трёхзначное число. Значит, шестизначных палиндромов ровно столько же, сколько трёхзначных чисел, то есть 900. Таким же является и количество пятизначных палиндромов, а количества четырёхзначных и трёхзначных палиндромов совпадают с количеством двузначных чисел (90). Кроме того, имеется 9 двузначных и 9 однозначных палиндромов. Всего же набирается $900+900+90+90+9+9=1998$ палиндромов, меньших 1000000.

400. О т в е т (пример): $484+484+484+282+282$. Р е ш е н и е. Всякий трёхзначный палиндром можно записать в виде $100a+10b+a = 101a+10b$, где a и b – некоторые цифры. Поэтому сумма нескольких трёхзначных палиндромов имеет вид $101A+10B$, где A – сумма первых цифр палиндромов, а B – сумма их средних цифр. Заметим, что число $101A$, делящееся на 101, должно оканчиваться шестёркой и не должно превосходить 2016; таких чисел всего два – 606 и 1616. Но легко убедиться, что равенства $101A=606$ и $10B=1400$ одновременно выполняться не могут. Значит, $101A=1616$, откуда $A=16$, $10B=400$ и $B=40$. Из последнего равенства видно, что число B является суммой не меньше, чем пяти цифр. Поэтому количество трёхзначных палиндромов, сумма которых равна 2016, не может быть меньше пяти.

Тема «Часы со стрелками»

100. О т в е т: один раз. У к а з а н и е. Показания часов совпадают в точности тогда, когда совпадают показания их часовых стрелок. При этом стрелка правильно идущих часов делает два оборота в сутки, а стрелка часов, идущих вдвое медленнее, – один.

200. О т в е т: 44. Р е ш е н и е. Поскольку минутная стрелка делает 24 оборота в сутки, а часовая – 2, то первая обгоняет вторую $24-2=22$ раза в сутки. Для получения ответа остаётся заметить, что между каждыми двумя

последовательными обгонами существует ровно два момента времени, когда стрелки взаимно перпендикулярны.

300. О т в е т: севшая первоначально на минутную стрелку проедет 7 кругов, а севшая на часовую – 6. Р е ш е н и е. Заметим, что мухи друг друга не обгоняют, а потому муха, севшая первоначально на минутную стрелку, может проехать только на 1 круг больше, чем другая. В общей сложности мухи проедут 13 кругов – столько, сколько в общей сложности оборотов сделают стрелки (часовая – 1, минутная – 12). Ответом является пара натуральных чисел, отличающихся не больше чем на 1 и дающих в сумме 13.

400. О т в е т: 55 минут 23 секунды. Р е ш е н и е. Заметим сначала, что поменяться местами стрелки могут быстрее, чем за час. Каждая из них при этом пройдёт меньше круга, а сумма частей круга, пройденных стрелками, составит в точности один круг. Далее воспользуемся тем, что минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, и, следовательно, отношение упомянутых частей круга равно 12:1. Значит, за искомое время минутная стрелка пройдёт $12/13$ круга, что примерно соответствует 55 минутам 23 секундам.