

Разбор задач 3 тура 1 турнира 6 математической онлайн-игры

Тема «Числа и цифры»

100. При каком наименьшем n число $n!$ делится на 2016?

Ответ: 8. Р е ш е н и е. Все меньшие факториалы не делятся на 32.

200. Какая цифра находится на 2016-м месте в ряду 12233344445..., где каждое натуральное число N записано N раз?

Ответ: 4. Р е ш е н и е. Однозначные числа занимают первые $1+2+3+\dots+9=45$ мест. Двухзначные числа от 10 до 39 занимают $2(10+11+12+\dots+39)=40\cdot 49=1960$ мест. Всего 2005 мест. Далее, с 2006 места идут цифры 404040... . На 2016-м месте стоит 4.

300. Какие числа, не превышающие 1000, увеличиваются в 4,5 раза, если их читать справа налево?

Ответ: 18 – одно такое двухзначное число и 198 – трёхзначное число. Р е ш е н и е. Однозначные числа не подходят. Двухзначные: $10y+x=4,5(10x+y)$. Отсюда, $20y+2x=90x+9y$. Или $11y=88x$. Отсюда ответ. Трёхзначные: $100z+10y+x=4,5(100x+10y+z)$. $200z+20y+2x=900x+90y+9z$. $191z=70y+898x$. Т.к. x не равно нулю, а z – чётное число, значит, z равно 6 или 8. В первом случае имеем: $573=35y+449x$. x может быть только 1, т.е. $124=5y$. Во втором, $764=35y+449x$. Опять $x=1$, т.е. $315=35y$. В первом случае решений нет, а во втором – указанный ответ.

400. Сколько существует делящихся на 3 трёхзначных чисел, у каждого из которых все цифры различны?

Ответ: 228. Р е ш е н и е. В первой сотне 3-значных чисел (от 100 до 199) таких чисел всего 26. Столько же в 4-й и 7-й сотнях. Во второй сотне (как и 5-й и в 8-й) – по 26. В третьей (как и в 6-й и 9-й) – по 24.

Существует и комбинаторное решение задачи.

Тема «Логика»

100. Два узника сидят в двух одиночных камерах. Им устраивают испытание. Каждому в камеру приносят кота. Кот может быть чёрным или белым. Каждый пытается угадать, какого цвета кот у его товарища. Если хотя бы один из узников угадает, то их отпустят на свободу, иначе – казнят. Перед

испытанием узники могут пообщаться и договориться о своих действиях. Могут ли они гарантированно освободиться?

Ответ: да. Р е ш е н и е. Достаточно одному сказать, что цвет кота у товарища – такой же, как и у него, а второму, что цвет – противоположный. Тогда, если цвет котов совпадает, угадает первый, а если цвет котов разный, угадает второй.

200. Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей могло быть среди проходивших тестирование?

Ответ: 50. Р е ш е н и е. Если рыцарей больше 50, то первый вышедший может быть только лжецом. После его ухода ситуация сохраняется. И так, уходить могут только лжецы, но их меньше 50. Противоречие. Если рыцарей меньше 50, то первым уйти может только рыцарь. Ситуация опять таки сохраняется. Значит, уходить могут только рыцари, но их меньше 50. Противоречие. Значит, рыцарей и лжецов ровно по 50. Первым уходит рыцарь и говорит правду. Вторым – лжец и лжёт. Так может продолжаться 60 раз.

300. На острове Политики живут 2016 политиков. Каждый из них при ответе на вопрос лжёт, если знает правильный ответ, и говорит что угодно, если не знает. Как-то на острове провели выборы губернатора, в которых участвовали два кандидата, после чего каждому политику задали два вопроса: "За кого Вы голосовали?" и "Кто выиграл выборы?". Ровно 1000 политиков ответила: "Голосовал за кандидата А" и "Выиграл кандидат А". Остальные 1016 ответили: "Голосовал за кандидата Б" и "Выиграл кандидат Б". Известно, что все политики голосовали, и каждый помнит, за кого отдал голос. Какое наибольшее количество политиков могли знать реальные итоги выборов?

Ответ: 1016. Р е ш е н и е. Т.к. 1016 политиков ответили, что голосовали за Б, значит, они голосовали за А, и тот выиграл. 1000 политиков определённо не знали результатов, иначе бы не сказали, что выиграл А. Остальные могли знать.

400. На острове живут три народа — гномы, которые всегда говорят правду, орки, которые всегда лгут и хоббиты, которые могут лгать или говорить

правду по своему выбору. За круглый стол сели 20 островитян. Каждый из сидящих произнёс две фразы: «Мой левый сосед — орк», «Мой правый сосед — хоббит». Сколько хоббитов может сидеть за столом? Укажите все возможности.

Ответ: 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. **Р е ш е н и е.** Гном сидит между орком и хоббитом. Левый сосед орка – гном или хоббит, но гномом он быть не может, т.к. у того правый сосед – не орк. Итак, слева от орка сидит хоббит, а справа – гном. Орком он быть не может, т.к. у того слева – не орк. Итак, каждая пара орк-гном окружена хоббитами. Групп хоббитов, сидящих между парами орк-гном, столько же сколько этих пар. Групп пар орк-гном не больше шести, т.к. иначе, в них не меньше 14 островитян, и вместе с разделяющими их хоббитами присутствующих больше 20. Для каждого числа пар (от 0 до 6) получаем один из ответов.

Тема «Куб, сложенный из кубиков»

100. Петя разломал куб, сложенный из одинаковых кубиков, и сложил из всех них новый. При этом все кубики, которые были граничными у старого куба, стали внутренними у нового. Каким наименьшим может быть число всех кубиков?

Ответ: 1000. **У к а з а н и е.** Если куб был сложен из N^3 кубиков, то внутренними были $(N-2)^3$, а граничными – $N^3 - (N-2)^3$ из них. Следовательно, число $N^3 - (N-2)^3$ не превосходит числа N^3 , и нам остаётся воспользоваться таблицей кубов целых чисел.

200. Куб сложен из k кубиков размера $1 \times 1 \times 1$ и k кубиков размера $2 \times 2 \times 2$. Каким наименьшим может быть число k ?

Ответ: 24. **Р е ш е н и е.** Ясно, что длина ребра полученного куба является целым числом. Это число кратно 3, поскольку объём куба равен $(1^3 + 2^3)k = 9k$. Куб $3 \times 3 \times 3$ сложить нельзя, так как в нём помещается только один кубик $2 \times 2 \times 2$. А куб $6 \times 6 \times 6$ - можно: сложив сначала такой куб из 27 кубиков $2 \times 2 \times 2$, заменим в нём какие-нибудь 3 кубика на кубики, составленные из кубиков $1 \times 1 \times 1$.

300. Из 27 кубиков, одинаковых по размеру, сложен куб. Некоторые из кубиков золотые, а каждый незолотой кубик примыкает гранью хотя бы к одному из золотых. Каким наименьшим может быть число золотых кубиков?

Ответ: 6. **Р е ш е н и е.** Размещение 6 золотых кубиков, при котором выполняются нужные условия, может быть, например, таким. Пусть один из

золотых кубиков будет центральным в нижнем слое куба, другой – центральным в верхнем слое, а ещё 4 – угловыми в среднем слое.

Докажем, что 5 золотых кубиков будет недостаточно. Выделим в кубе следующие 4 кубика: левый в первом ряду нижнего слоя, правый в третьем ряду нижнего слоя, правый в первом ряду среднего слоя и левый в третьем ряду среднего слоя. С выделенными кубиками должны быть связаны 4 разных золотых кубика (каждый из которых должен либо примыкать к выделенному, либо совпадать с ним). В верхнем слое тогда будут иметься 7 кубиков (все, кроме правого в первом ряду и левого в третьем ряду), ни один из которых не граничит ни с одним из этих 4 золотых. Для того же, чтобы все незолотые из указанных 7 кубиков граничили с золотыми, понадобится, как легко видеть, ещё как минимум 2 золотых.

400. Набор кубиков с разноцветными гранями таков, что, какой бы из четырёх цветов – красный, синий, жёлтый или зелёный – ни выбрать, из всех кубиков можно сложить куб, снаружи весь окрашенный в выбранный цвет. Каким наименьшим может быть число кубиков в этом наборе?

Ответ: 64. У к а з а н и е. Размер складываемого куба не может быть меньше, чем $4 \times 4 \times 4$ (иначе на его границу всегда попадало бы более $1/4$ от числа всех граней кубиков, что невозможно). С другой стороны, из $4^3 = 64$ неокрашенных кубиков можно изготовить набор, обладающий указанным в условии задачи свойством.

В самом деле, сложив куб $4 \times 4 \times 4$, покрасим его снаружи весь в красный цвет. Затем перенесём, не переворачивая, нижний слой (параллелепипед $4 \times 4 \times 1$), сделав его верхним. Аналогично поступим с первым слева параллелепипедом $1 \times 4 \times 4$, сделав его первым справа, и с "фасадным" параллелепипедом $4 \times 1 \times 4$, который сделаем "тыльным". Все грани кубиков, оказавшиеся после этих переносов граничными для куба, покрасим в синий цвет. Далее проделываем то же самое ещё раз, используя уже жёлтую краску. А осуществив переносы трёх параллелепипедов в третий раз, границу куба покрасим в зелёный цвет.