Разбор задач финала 9 математической онлайн-игры

Тема «Степени»

100. Из семи разных цифр составьте два натуральных числа, одно из которых является кубом второго.

Ответ (пример): 27^3=19683

200. Из цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 составьте натуральное число, являющееся шестой степенью натурального числа.

Ответ (пример): 387420489=27^6

300. Пятизначное число умножили на точную степень другого числа, большего 1, и получили число из тех же цифр, но записанных в обратном порядке. Найдите все такие числа.

Ответ: 10989 * 9 = 98901, 21978 * 4 = 87912

400. Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 3 становится кубом натурального числа, а при умножении на 5 – пятой степенью натурального числа.

Ответ: 3^5x5^9

Тема «Гномы и молоко»

100. Один гном выпивает бутылку молока за 5 минут, а второй – за 7 минут. За сколько минут они справятся с этой бутылкой вдвоём?

Ответ: 2 минуты 55 секунд

200. Пятерым гномам налили в кружки всего 1 литр молока. Первый разлил всё своё молоко поровну остальным гномам. Затем то же сделали по очереди второй, третий, четвёртый и пятый гномы. В результате у каждого оказалось столько молока, сколько и в начале. Сколько?

Ответ: 400 мл, 300 мл, 200 мл, 100 мл, 0 мл

300. Известно, что гном выпивает за завтраком целое число граммов молока. В пакете 100 граммов молока. Девяти гномам хватило на завтрак 12 пакетов, а 13 гномам – 16 пакетов. Меньшим количеством пакетов обойтись не удалось. Сколько молока выпивает гном за завтраком?

Ответ: 123

400. Пятерым гномам дали три двухлитровые бутылки и две литровые бутылки молока. Два гнома пьют молоко со скоростью 2 литра в минуту, а остальные трое – 1 литр в минуту. Одновременно из одной бутылки может пить только один гном, но в любой момент гномы могут меняться бутылками. За какое наименьшее время всё молоко может быть выпито?

Ответ: 1 минута 12 секунд

Тема «Быки-коровы»

Компьютер загадал четырёхзначное число X с неповторяющимися цифрами (первая из которых может быть и нулём). Мы пытаемся это число отгадать. Каждая наша попытка - ввод какого-нибудь числа (тоже четырёхзначного с неповторяющимися цифрами). Компьютер сообщает, сколько "быков" и "коров" содержит введённое нами число. "Бык" - цифра в нашем числе, которая совпадает с цифрой, стоящей на той же позиции в X. А "корова" - цифра из нашего числа, которая есть в X, но стоит на другой позиции. (Например, если X = 5407, а введено 7480, то компьютер выдаст сообщение "один бык, две коровы".)

100. Пусть на числа 1357, 0246 и 5019 получены сообщения "один бык, одна корова", "один бык, ноль коров" и "два быка, одна корова" соответственно. Найдите X.

Ответ: 0319. **Указание.** Заметим, что X содержит ровно одну из цифр пары (1, 5). Поэтому X содержит 0 и 9.

200. Пусть на число 2017 получено сообщение "один бык, ноль коров". Найдите количество всех возможных X.

Ответ: 480. **Решение.** Из условия следует, что на каких-то 3 из 4 позиций в числе X стоят различные цифры A, B, C, принадлежащие множеству {3, 4, 5, 6, 8, 9}. Выбрать 3 позиции из 4 можно 4 способами, а упорядоченный набор (A, B, C) из указанного 6-элементного множества – 120 способами (6 x 5 x 4 = 120). Следовательно, имеется ровно 4 x 120 = 480 различных возможных X.

300. Пусть известно, что X - это одно из чисел 0123, 1234, 2345, 3456, 4567, 5678 и 6789. За какое наименьшее число попыток можно наверняка определить X?

Ответ: за 1. **Указание.** Достаточно ввести число 6754; сообщения для 7 данных чисел будут все разными.

400. Пусть на некоторое число получено сообщение "два быка, две коровы". Какое наименьшее число попыток ещё требуется, чтобы наверняка определить X?

Ответ: 2. **Решение.** Для удобства будем считать, что введено число 1234, и, таким образом, X находится среди следующих 6 чисел: 2134, 3214, 4231, 1324, 1432, 1243.

Сначала объясним, почему одной попытки может оказаться мало. Пусть мы вводим какое-нибудь число, ровно m цифр которого принадлежат множеству {1, 2, 3, 4}. Любое сообщение на вводимое число тогда будет иметь вид "k быков, l коров", где k и l – целые неотрицательные числа, сумма которых равна m. Значит, число всех возможных сообщений совпадает с числом решений уравнения $k + l = m$ в целых неотрицательных k и l; это число, равное $m + 1$, меньше 6 (поскольку m не больше 4). А тогда может прийти сообщение, которое будет соответствовать по меньшей мере двум из 6 возможных X, что и повлечёт необходимость второй нашей попытки.

Теперь покажем, как, сделав две попытки, найти X. Введём число 1A2B, где A и B - произвольные цифры из множества {0, 5, 6, 7, 8, 9}. На это может прийти одно из следующих трёх сообщений: 1) "два быка, ноль коров", 2) "один бык, одна корова", 3) "ноль быков, две коровы". Разберём все три случая.

1) Видим, что двойка и тройка в сообщении на число 1234 были "коровами". Такое возможно только при X = 1324.

2) Если бы (в сообщении на 1A2B) единица была "коровой", а двойка – "быком", то в сообщении на 1234 речь шла бы по меньшей мере о трёх "коровах" (1, 2 и 3). Значит, единица – "бык", двойка - "корова", откуда легко вывести, что X равно 1243 или 1432. Ясно, что далее можно обойтись одной попыткой.

3) Для этого случая остаются три возможных X: 2134, 3214 и 4231. Вводим 2130 и по поступившему сообщению ("три быка, ноль коров", "ноль быков, три коровы" или "один бык, две коровы") определяем X.