Разбор задач финала 8 математической онлайн-игры

Тема «Самое большое число»

100. О т в е т: 9687 x 8796. **У к а з а н и е.** Нужный максимум находим подбором.

200. О т в е т: 737. **Р е ш е н и е.** Предположим, что искомое число N больше 1000. Ясно, что в его записи могут участвовать только цифры 2, 3, 5, и 7, причём одинаковые цифры не могут стоять рядом, а на трёх последних местах могут быть только тройки и семёрки. Если N оканчивается тройкой, то оно оканчивается на простое число 373, однако ни одно из чисел 2373, 3373, 5373 и 7373 условиям задачи не удовлетворяет, поскольку числа 237, 33, 537 и 737 - составные. Если же N оканчивается семёркой, то оно оканчивается на 37, а в разряд сотен подходящей цифры уже не находится. Полученное противоречие означает, что искомое число меньше 1000, а из вышеприведённых рассуждений видно, что оно равно 737.

300. О т в е т: 3816547290. Искомое число находится перебором.

400. О т в е т: 973. **У к а з а н и е.** Усемерённую сумму квадратов цифр числа N будем обозначать через G(N). Легко вычислить, что если N записывается n цифрами, то G(N) не превосходит 567n; при n, большем 4, очевидно неравенство G(N) < N. Предположив же, что N четырёхзначно, последовательно устанавливаем неравенства G(N) < 7(9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2) = 2268, N < 2268, G(N) < 7(1^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2) = 1708, N < 1708, G(N) < 7(1^2 + 6^2 + 9^2 +9^2) = 1393, N < 1393, G(N) < 7(1^2 + 2^2 + 9^2 + 9^2) = 1169 и N < 1169. Но все натуральные X, для которых X < 1169 и G(X) > 1000, исчерпываются числами 1089, 1098 и 1099; ни одно из этих чисел равенству X = G(X) не удовлетворяет. Следовательно, искомое число меньше 1000. А наибольшее трёхзначное X, для которого X = G(X), найдём, проверяя самые большие трёхзначные числа, делящиеся на 7.

Тема «Криптография»

100. О т в е т: "Подскажи ответ!".

200. О т в е т: ФУФАЙКА. **У к а з а н и е.** 2-я буква в алфавите - Б, а 22-я - Ф. Если бы слово начиналось с Б, то следующей буквой в нём была бы также либо Б, либо Ф. Но слов, начинающихся с ББ или с БФ в словаре нет, следовательно, зашифрованное слово начинается с буквы Ф. Рассуждая аналогично, расшифруем и все остальные буквы.

300. О т в е т: на нулевом уровне - ОДУВАНЧИК, на третьем - СЁФВГПШИН. У к а з а н и е. Ключами к уровням служат числа 101010101, 210210210 и 321032103. Произвольная цифра d в ключе равна разности n' - n , где n - порядковый номер (в алфавите) соответствующей шифруемой буквы, n' - число, на которое эта буква при шифровании заменяется.

400. О т в е т: утром я улетаю. **Р е ш е н и е.** Сформулируем и докажем четыре вспомогательных утверждения.

1) Константа A не кратна 34. В самом деле, если бы она была кратна 34, то одинаковые буквы шифровались бы (вне зависимости от их места в тексте) одинаковыми числами, а разные буквы - разными числами. И тогда при дешифровке фрагмента 16, 16, 16, 16 получались бы четыре одинаковые буквы подряд; ясно, что в тексте такого не может быть.

2) Записка начинается не с местоимения "я". Допустим противное. Тогда число $33+A+B-15$ кратно 34, а поскольку за местоимением должен идти пробел, то число $2A+B-16$ также кратно 34. Таким же свойством обладает и разность $(2A+B-16) - (33+A+B-15) = A-34$, следовательно, A кратно 34. Но это противоречит первому утверждению.

3) Записка заканчивается не местоимением "я". Аналогично, рассуждая от противного, получим, что числа $33+14A+B-18$, $13A+B-19$ и $(33+14A+B-18) - (13A+B-19) = A+34$ кратны 34. Вновь придём к противоречию с первым утверждением.

4) Пусть местоимение "я" закодировано числом q, соседями которого являются числа p и r (кодирующие пробелы). Тогда число $2q-p-r+2$ делится на 34. В самом деле, если пробел слева от "я" стоит на n-ом месте в сообщении, то числа $nA+B-p$, $33+(n+1)A+B-q$, $(n+2)A+B-r$, $(nA+B-p) - 2(33+(n+1)A+B-q) + ((n+2)A+B-r) = 2q-p-r-66$, а значит, и число $2q-p-r+2$, делятся на 34.

Перед тем, как перейти непосредственно к дешифровке, найдём в закодированной записке подряд идущие числа x, y, z, для которых число $2y-x-z+2$ делится на 34; это числа 4, 5 и 8 (шестое, седьмое и восьмое соответственно). Получим, что числа $6A+B-4$, $33+7A+B-5$ и их разность $(33+7A+B-5) - (6A+B-4) = A+32$ кратны 34; следовательно, можно считать, что $A=2$, и тогда в качестве B годится число -8.

Итак, имеем формулу $k = m + 2n - 8$, где k - число, которым буква закодирована, m - номер (или число, отличающееся на целое кратное 34 от номера) буквы в алфавите, n - номер места буквы в сообщении. (Все другие возможные значения констант A и B отличаются от выбранных на числа, кратные 34.) При помощи этой формулы записка легко расшифровывается.

Тема «Три мудреца»

100. О т в е т: 1 или 2. **У к а з а н и е.** Задача решается методом перебора.

200. О т в е т: за три. **Р е ш е н и е.** Может случиться, что первый вопрос достанется мудрецу, отвечающему, как ему вздумается. Из-за этого перед вторым вопросом будет сохраняться ситуация, когда в отношении каждого из троих мудрецов мы допускаем, что именно он всегда лжёт. И тогда, какой бы и кому мы не задали второй свой вопрос, может случиться, из трёх допускаемых нами вариантов (всегда лжёт мудрец № 1, всегда лжёт мудрец № 2, всегда лжёт мудрец № 3) отпадёт только один или ни одного. А это повлечёт необходимость задать третий вопрос.

За три вопроса определить всегда лгущего можно. В самом деле, пусть A, B и C - имена мудрецов. Спросим у A: "Верно ли, что B правдивее, чем C?". Ответ ДА будет означать, что C либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт; задав тогда C вопрос "Верно ли, что A и B оба всегда лгут?", мы узнаем, кем является сам C. Если C всегда правдивый, то, задав ему ещё вопрос "Верно ли, что A всегда лжёт?", мы узнаем, кто же (A или B) всегда лжёт. Случай, когда на первый из своих вопросов мы получаем ответ НЕТ, разбирается аналогично.

300. Р е ш е н и е. Пусть мудрецы пронумеруют себя числами 0, 1, 2 и договорятся о том, что k-й (k=0,1,2) мудрец запишет на бумажке то из чисел 1, 2, 3, которое в сумме с суммой видимых чисел даст остаток k при делении на 3. (Например, если 2-й мудрец увидит на лбах коллег числа 2 и 3, то запишет 3, поскольку 3+2+3 даёт остаток 2.) Тогда у мудреца, номер которого окажется равным остатку от деления на 3 суммы всех чисел на лбах, число на бумажке совпадёт с числом на лбу.

400. Р е ш е н и е. Зададим вопрос "Верно ли, что всегда лгущий сидит слева от всегда говорящего правду?". Тогда у говорящего как вздумается (и только у него) левый сосед скажет ДА, а правый - НЕТ.