Разбор задач 5 тура 8 математической онлайн-игры

Тема "Вершины и стороны многоугольников"

100. О т в е т: один или три. У к а з а н и е. Если все точки, отмеченные Петей, образовывали выпуклый четырёхугольник, то только этот четырёхугольник и мог получиться у Васи. А если выпуклого четырёхугольника не было, то одна из отмеченных точек находилась внутри треугольника, образованного остальными отмеченными точками, и у Васи получилось бы три разных четырёхугольника (см. рисунок 1).

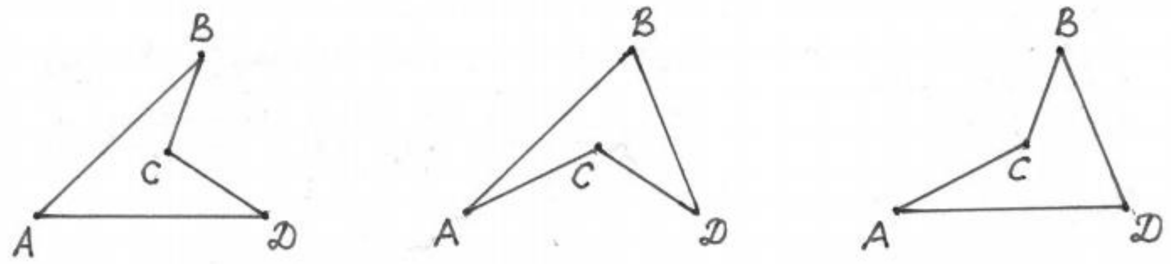

Рисунок 1

200. О т в е т: на двух. Р е ш е н и е. В силу определения многоугольника все вершины не могут лежать на одной прямой. А на рисунке 2 приведён пример восьмиугольника, все вершины которого принадлежат двум (показанным пунктиром) прямым.

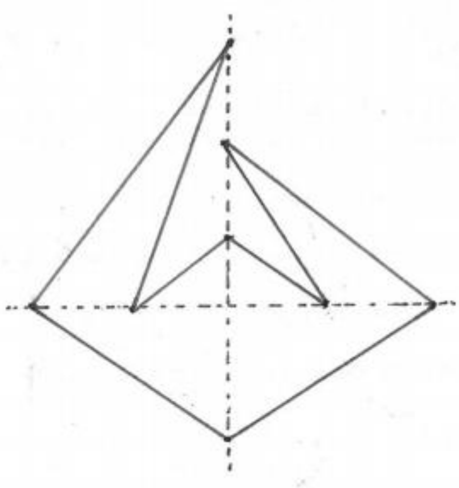

Рисунок 2

300. О т в е т: в 10 точках. Р е ш е н и е. Заметим, что каждая из сторон пятиугольника пересекает не более двух из сторон треугольника.

Следовательно, искомое количество точек пересечения контуров не превосходит $5 \times 2 = 10$. Оно может равняться 10, что видно из рисунка 3, где контур пятиугольника показан пунктиром.

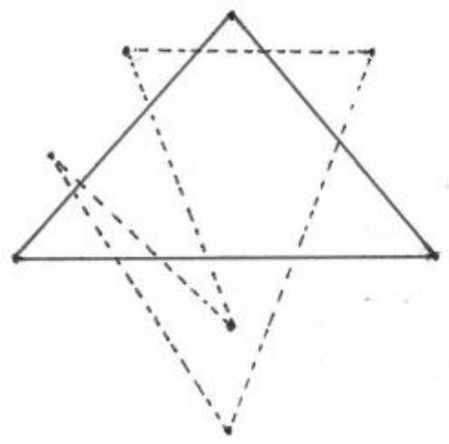

Рисунок 3

400. О т в е т: 5, 6, 7, 10. У к а з а н и е. Нетрудно установить, что: 1) на каждой из 5 прямых, о которых говорится в условии, лежит не более двух сторон N-угольника; 2) имеет место равенство $N = 5 + k$, где k - количество прямых, содержащих в точности по две стороны N-угольника; 3) если k больше 2, то обязательно $k = 5$. Из этих утверждений получается, что все искомые значения N принадлежат множеству $\{5, 6, 7, 10\}$. Равенство $N = 5$, очевидно, возможно (примером служит произвольный пятиугольник), а на рисунках 4, 5 и 6 показаны примеры для случаев $N = 6$, $N = 7$ и $N = 10$ соответственно. (Везде сначала строится пунктиром пятиконечная звезда, а затем жирными линиями обводятся контур N-угольника.)

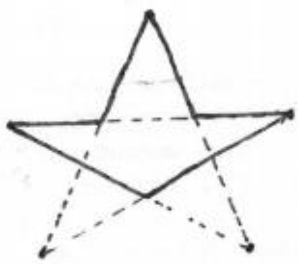

Рисунок 4

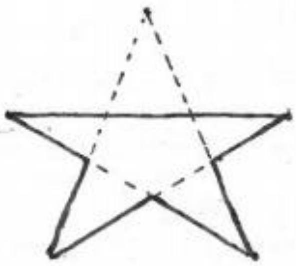

Рисунок 5

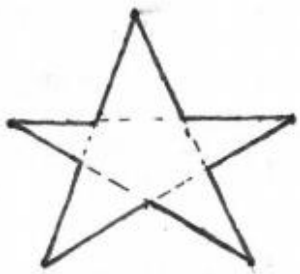

Рисунок 6

Тема "Монеты"

100. О т в е т: 4, 5, 7, 8, 9, 11 или 12 рублей. У к а з а н и е. Задача решается методом перебора.

200. О т в е т: за два. У к а з а н и е. Покажем, что двух взвешиваний всегда хватит. Пусть для первого взвешивания на левую чашу весов кладутся обе 1-пенсовые монеты, а на правую чашу - одна 2-пенсовая. Тогда возможны следующие три случая. 1) Левая чаша легче правой; это значит, что какая-то из 1-пенсовых монет - фальшивая. 2) Левая чаша тяжелее правой; это значит, что 2-пенсовая монета, лежащая на правой чаше, - фальшивая, и второе взвешивание уже не требуется. 3) Весы в равновесии; это значит, что фальшивую монету следует искать среди трёх, не лежащих на весах. В случае 1 остаётся сравнить между собой 1-пенсовые монеты. А в случае 3 - сравнить между собой 3-пенсовые; равенство будет означать, что фальшивой является 2-пенсовая (ни разу не побывавшая на весах).

300. О т в е т: 89. Р е ш е н и е. 10 или меньшим количеством монет без помощи реала можно уплатить любую сумму от 1 до 88 крузейро, но не 89 крузейро. Значит, в реале не больше 89 крузейро, и нам остаётся убедиться в возможности равенства 1 реал = 89 крузейро. Для этого заметим, что любую сумму от 1 до 78 можно уплатить 9 или меньшим количеством монет (без реала). А любое целое число от 89 до 157 равно 89 плюс остаток, который не превосходит 157 - 89 = 68.

400. О т в е т: 1365. Р е ш е н и е. Разберём более общую задачу, когда в ряд выкладывается m монет, где m - произвольное натуральное число. Каждому m соответствует тройка чисел (m', m'', m'''), где m' - количество способов выложить (с соблюдением условий задачи) m монет так, чтобы последней в ряду была золотая, m'' - чтобы последней была серебряная, m''' - чтобы последней была бронзовая. Непосредственно устанавливаем, что числу $m = 1$ соответствует тройка (1, 1, 1), числу $m = 2$ - тройка (1, 3, 1), а числу $m = 3$ - тройка (3, 5, 3). Здесь возникает легко доказываемая гипотеза о том, что для любого m выполнены равенства $(m + 1)' = m''$, $(m + 1)'' = m' + m'' + m'''$ и $(m + 1)''' = m''$. При помощи этих равенств последовательно находим, что числам $m = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ соответствуют тройки (5, 11, 5), (11, 21, 11), (21, 43, 21), (43, 85, 43), (85, 171, 85), (171, 341, 171), (341, 683, 341). А ответом к задаче является сумма 10' + 10'' +10''' = 341 + 683 + 341 = 1365.

Тема "Угадай закономерность"

100. Ответ: ДДВСШПЧТДОН. Это первые буквы чисел «обратного» отсчёта от 10 до 0)

200. Ответ: 8. Каждая следующая цифра равна последней цифре суммы всех предыдущих чисел.

300. Ответ: сумма в каждой строке равна номеру строки, сумма в каждом столбце равна номеру столбца. Желтым выделены вставленные в таблицу числа.

5	-2	1	-3
2	5	3	-8
-4	-1	0	8
-2	0	-1	7

400. Ответ: (2 1) (1 3) (4 4) (4 4) . Первое число в каждой паре указывает, сколько цифр, равных второй цифре в паре, встречается в этой последовательности: (две единицы), (одна тройка) (четыре четвёрки). Чтобы третье и четвёртое утверждение были верны, надо чтобы недостающей цифрой была четвёрка.