Разбор задач 4 тура 8 математической онлайн-игры

Тема «Поменьше вопросов!»

100. У к а з а н и е. Достаточно спросить, например, про число 2067.
200. О т в е т: за 2. Р е ш е н и е. Пусть эти люди обозначены через A, B, C и D, а первый вопрос задаётся человеку A про человека B. Ответ "да" будет означать, лжец находится среди A и B, а C и D правдивые; спросив затем, например,C про A, мы узнаем, кто (A или B) лжец. Если же A (на вопрос о B) ответит "нет", то лжеца следует искать среди C и D; для этого мы вновь можем воспользоваться мнением A, спросив его, например, про C.

300. У к а з а н и е. Коля должен действовать так, чтобы в худшем для него случае множество, в котором окажется задуманная Олей буква, состояло из как можно меньшего количества букв. Уже известно, что Олина буква - одна из 32 (от А до Ю); значит, Колино слово должно быть подобрано так, чтобы это 32-буквенное множество разбилось на две равные (по 16 букв) части. (Одна часть - буквы, входящие в слово, другая - не входящие.) Нужным свойством обладает, например, слово СЕМНАДЦАТИУГОЛЬНИК.

400. О т в е т: за 11. Р е ш е н и е. Пронумеруем карты по часовой стрелке числами от 1 до 11 и зададим вопрос про каждые две, лежащие рядом друг с другом (таких пар одиннадцать - (1,2), (2,3), ..., (10,11), (11,1)). Каждая карта входит ровно в две пары, следовательно, сумма объявленных нам 11 чисел будет равна удвоенному количеству карт чёрной масти. Это значит, что полученных нами ответов достаточно для определения искомого количества.

Десяти (и, тем более, меньшего числа) вопросов может не хватить. Действительно, предположим, что мы не спрашиваем, например, про пару карт (7,8). Тогда, если на все вопросы про остальные пары будем получать один и тот же ответ "одна", то общее количество карт чёрной масти будет оставаться неизвестным: оно может быть равным как пяти (карты 2, 4, 6, 9 и 11), так и шести (карты 1, 3, 5, 7, 8 и 10).

Тема «Геометрия»

100. О т в е т: 54. Р е ш е н и е. Ясно, что X расположен в северном полушарии, иначе путь от X до Южного полюса через Северный был бы более чем втрое длиннее кратчайшего пути. Искомое число обозначим через x. Тогда части меридиана, соединяющего X с Южным и Северным полюсом, будут иметь длины 90+x и 90-x градусов соответственно. А поскольку расстояние между полюсами равно полному меридиану (180 градусам), то выполняется равенство $1{,}5(90+x) = 90-x+180$; из него находим $x=54$.

200. О т в е т: 3, 4, 5 или 6. У к а з а н и е. Искомое число равно $3+n$, где n - число отмеченных точек, каждая из которых лежит более чем на одной из указанных трёх прямых. Ясно, что n не превосходит 3. Случаи, когда n равно 0, 1, 2, и 3 показаны на рисунках 200а, 200б, 200в и 200г соответственно.

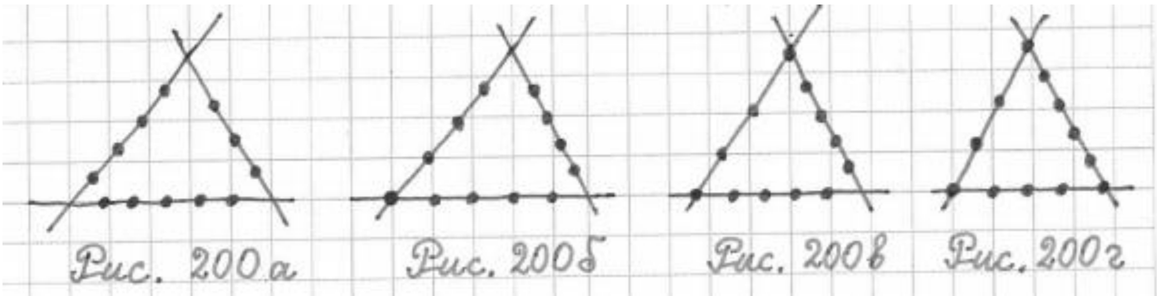

Рис. 200а Рис. 200б Рис. 200в Рис. 200г

300. О т в е т: 12 х 9. Р е ш е н и е. Искомые размеры (в сантиметрах) обозначим через s и h. Пусть два прямоугольника периметра 30 см получаются так, как это показано на рисунке 300а, причём размеры этих прямоугольников равны $(s/2) \times h$. Тогда три прямоугольника периметра 30 см могут быть получены только так, как на рисунке 300б; каждый из этих трёх прямоугольников имеет размеры $s \times (h/3)$. Из системы уравнений $(s/2) + h + (s/2) + h = 30$, $s + (h/3) + s + (h/3) = 30$ находим $s = 12$, $h = 9$.

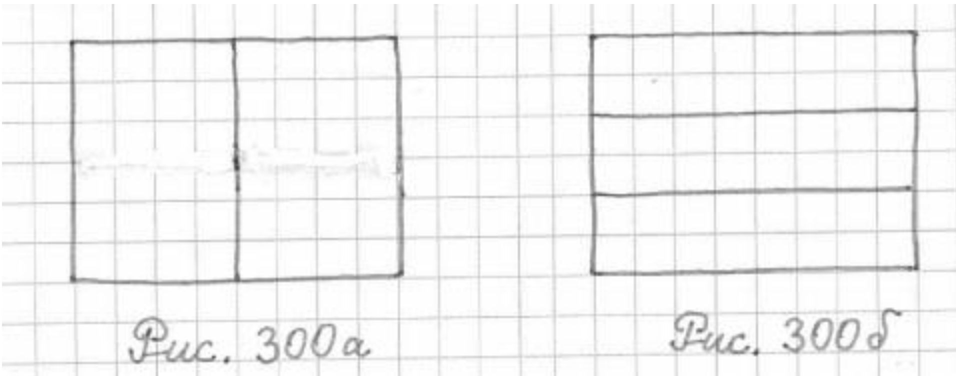

Рис. 300а Рис. 300б

400. О т в е т: на 10. Р е ш е н и е. На рисунке 400а показаны все фигурки, которые можно составить из одной, двух, трёх или четырёх клеток. Число этих фигурок равно 9, а общее число клеток в них - 29; следовательно, справедливо следующее утверждение: любые 9 различных клетчатых фигурок содержат вместе не меньше 29 клеток.

Предположим, что квадрат 6 х 6 разрезан на 11 или большее число различных клетчатых фигурок. Тогда 9 наименьших (по площади) фигурок занимают не меньше 29 клеток, и имеются ещё по крайней мере 2 фигурки, каждая из которых занимает не меньше 5 клеток. Всего, таким образом, занято не меньше, чем $29 + 5 + 5 = 39$ клеток. Но весь квадрат насчитывает только 36 клеток. Полученное противоречие означает, искомое число не превосходит 10.

С другой стороны, на 10 различных фигурок квадрат разрезать можно; соответствующий пример приведён на рисунке 400б.

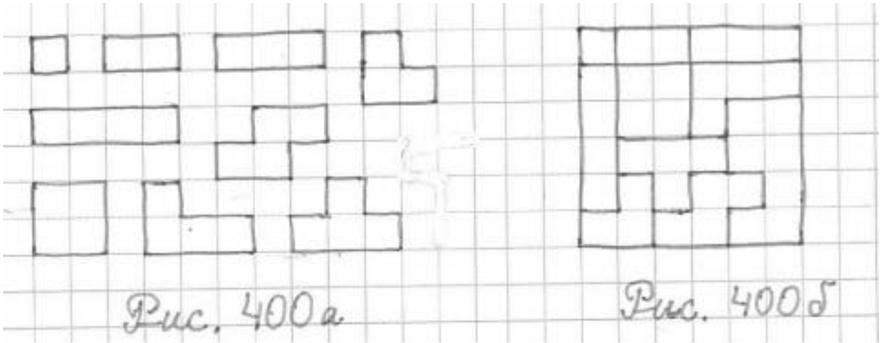

Рис. 400а Рис. 400б

Тема «Текстовые задачи»

100. О т в е т: в 1,2 раза. Р е ш е н и е. Сладостью жидкости будем считать количество сахара в 1 литре этой жидкости. В результате пролития 200 мл (1/5 бутылки) кока-колы количество сахара уменьшилось на 1/5 в сравнении с первоначальным. А количество сахара в чае равно 2/5 первоначального количества сахара в бутылке. Значит, в итоге получилось $1 - 1/5 + 2/5 = 6/5 = 1{,}2$ первоначального количества.

200. О т в е т: 2000. Р е ш е н и е. Каждый из двух пиратов, не получивших слитки, получил $(800+800+800)/2 = 1200$ дублонов. Так как это равно 1/5 цены всей добычи, то добыча (три слитка) стоит $1200 \times 5 = 6000$ дублонов, а один слиток - 2000 дублонов.

300. О т в е т: в 3 раза. Р е ш е н и е. Пусть Саша болтал s минут, Женя - g минут, а денег на телефоне в итоге осталось на t минут разговора. Тогда из условий задачи имеем равенства $s = (s+g+t)/2$ и $t = (s+g)/2$. Первое из них преобразуется к виду $s = g+t$; подставив сюда $t = (s+g)/2$, получим $s = g + (s+g)/2$, что равносильно равенству $s = 3g$.

400. К о м м е н т а р и й. Данные в условии задачи противоречат друг другу. Говорится, с одной стороны, что первые две трубы наполняют бассейн за время, большее часа, а с другой - эти же трубы наполняют его за 40 минут.